# Оцінювання деяких виразів з модулем числа під час розв'язування задач з параметрами в дидактичному контексті підвищення кваліфікації вчителів математики

*Мітельман Ігор Михайлович*[1]

| Опубліковано | Секція | УДК |
|---|---|---|
| 30.06.2023 | Освіта/Педагогіка | 378.046.4:372.851 |

DOI: http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.8096614



**Анотація.** Цілісність навчально-математичної діяльності вчителів Нової української школи ґрунтується на формуванні й синхронізації зон найближчого математичного розвитку учнів і зон методичного розвитку вчителя, на створенні продуктивних згорнутих дидактичних структур засобами евристично орієнтованих комплексів задач і спеціалізації теоретичного матеріалу. Рівняння та нерівності з модулями, функції, що задаються виразами з модулями, є наскрізним компонентом змісту шкільної математичної освіти. Метою статті є виокремлення та координація в умовах підвищення кваліфікації вчителів дидактичних зв'язків деяких класів задач з параметрами з нестандартними прийомами дослідження найменших (найбільших) значень відповідних виразів. Отримані результати сприяють реалізації принципів сучасного характеру знань, систематизації та добору змісту навчання у контексті фундаменталізації неперервної педагогічної освіти, орієнтують учителів на власну пошукову ініціативу й розширення дидактичної ресурсної основи профілізації шкільної математичної освіти, роботи з математично обдарованими учнями.

**Ключові слова:** задачі з параметрами, функції, які задаються за допомогою модуля числа, підвищення кваліфікації вчителів, математична та методична компетентність, продуктивні дидактичні структури, фундаменталізація змісту освіти.

## Estimation of some expressions with absolute values in solving problems with parameters in the didactic context of mathematics teacher professional development

**Annotation.** Subject-methodological competencies of a mathematics teacher of New Ukrainian School should be in the focus of the system of postgraduate pedagogical education. The integrity of educational and mathematical activity of teachers during professional development is based on theoretical and practical cases of formation and synchronization of zones of the nearest mathematical development of students and zones of methodological development of teachers, the creation of productive convolved didactic structures by means of heuristics-oriented systems of problems, and also specialization and transformation of high level theoretical material in the paradigm of education fundamentalization didactic principle.

[1] кандидат фізико-математичних наук, доцент, заслужений вчитель України, доцент кафедри методики викладання і змісту освіти, Комунальний заклад вищої освіти «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради», 65005, Україна, м. Одеса, пл. Михайлівська, 17, https://orcid.org/0000-0002-9817-6690

Teaching methodology of solving advanced problems with parameters has a special status due to the lack of universal algorithms for such types of problems and the necessity to apply deep analysis of their mathematical sense, various mathematical tools etc. Equations and inequalities with absolute values, functions defined using absolute values, are a cross-cutting component of school mathematical education content. The purpose of the paper is to identify and coordinate the didactic connections between some classes of problems with parameters with extraordinary methods of research of the maximal (minimal) values of expressions with parameters that are under the absolute value sign, and to actualize the corresponding theoretical questions of the elementary algebra and calculus. The achieved results contribute to the implementation of the modern nature of knowledge principles, systematization and selection of the training content in the context of in-service education of teachers, orient them to their own research initiative and expand the didactic resource basis for profiling of high school mathematical education, working with mathematically gifted students.

**Keywords:** problems with parameters, functions defined using absolute values, professional teacher development, mathematical and methodological competence, productive didactic structures, fundamentalization of education content.

**Вступ**

У фокусі системи післядипломної педагогічної освіти повинні постійно знаходитись дидактичні ресурси предметно-методичних компетентностей сучасного вчителя математики. Для забезпечення цілісності навчально-математичної діяльності вчителя під час підвищення кваліфікації мають моделюватись теоретичні й практичні кейси в колективній та колективно розподіленій творчості [10]. Виділимо наукові підходи С. П. Семенця щодо формувальних задачних структур (дидактичних комплексів) на основі створення *зон найближчого математичного розвитку учнів* (базової, навчальної, навчально-теоретичної і навчально-дослідницької) в умовах співпраці (співробітництва) вчителя та учнів [16]. При цьому взаємодія компетентнісних систем учасників освітнього процесу відбувається на основі механізмів їх синхронізації в розширеному розумінні: актуалізація зон найближчого математичного розвитку учнів неодмінно потребує розгортання відповідних *зон методичного розвитку вчителя* [9; 11].

Реалізація навчальних програм підвищення кваліфікації вчителів математики нерозривно пов’язується з удосконаленням відбору змісту лекційних і практичних занять, розвитком методичної техніки створення продуктивних згорнутих дидактичних структур засобами евристично орієнтованих комплексів задач та спеціалізації й трансформації теоретичного матеріалу високого рівня складності в парадигмі дидактичного принципу *фундаменталізації освіти* [1; 5; 8].

На шляху розбудови Нової української школи, переходу до профільного навчання в старшій школі ми акцентуємо увагу на готовності вчителя до повноцінного диференційованого навчання математики задля досягнення головної мети – розвитку кожного учня в соціально-психолого-індивідуальному, генетичному та діяльнісному вимірах особистості [16]. Виникає проблема створення в зоні професійного буття вчителя математики сегмента підвищення кваліфікації, зорієнтованого на робочий дидактико-методичний продукт із *відчутною відразу результативністю*, що є однією з базових рис agile-стратегій, описаних у статті [12], в якій, зокрема, обґрунтовано значущість та ефективність зв’язків і координації працюючих на основі цінностей agile підходів XP (eXtreme Pedagogy) й ATLM (Agile Teaching / Learning Methodology) з класичними технологіями в кластері неперервної освіти.

У Національній доктрині розвитку освіти, затвердженій Указом Президента України від 17.04.2002 № 347/2002, зазначається, що поєднання освіти і науки як умова модернізації системи освіти, головний чинник її дальшого розвитку забезпечується, зокрема, фундаменталізацією освіти. Дослідження С. У. Гончаренка, М. М. Ковтонюк, Г. О. Васьківської та ін. довели актуальність фундаменталізації освітнього процесу як універсальної дидактичної категорії, що стосується всіх його видів. У спеціальному меморандумі ЮНЕСКО (1994 р.) фундаменталізація освіти визнається одним з пріоритетів Болонського процесу, і тому принцип фундаменталізації слід розглядати серед провідних загальнодидактичних принципів, покладених в основу сучасної багаторівневої освіти, який поряд з науковістю навчання, гуманізацією освіти, систематичністю й генералізацією знань є формувальним чинником сучасного змісту освіти [1; 2]. Реалізація дидактичних концепцій залежить від ефективності та узгодженості функціонування всієї сукупності освітніх компонентів. Н. В. Захарчук аналізує підходи до систематизації та добору змісту освіти для забезпечення оптимального навчання в умовах фундаменталізаційних процесів у старшій школі (при цьому велика увага приділяється профільному навчанню) і в закладах вищої освіти під час професійної підготовки, що вимагає ґрунтовності, глибини засвоєння та структурованості знань як передумови формування мислення, наукового світогляду, знаннєвої культури, професійної компетентності тощо [5].

Публікації Г. В. Апостолової, Г. С. Варенко, А. І. Воробйової, В. І. Голубєва, Л. В. Грамбовської, Н. А. Грушко, А. С. Даніленко, В. П. Кондратьєвої, В. М. Лейфури, Г. М. Лященко, М. Я. Лященка, М. В. Рафальської, М. І. Кучевського, О. В. Масан, О. В. Пліско, А. В. Прус, В. В. Сороки, Н. О. Тарасенкової, О. Ю. Харік, І. Ф. Шаригіна, В. О. Швеця, В. В. Ясінського, багатьох інших науковців і вчителів-практиків, результати зовнішнього незалежного оцінювання з математики повною мірою обґрунтовують особливий дидактико-методичний статус процесу навчання розв'язування численних типів задач з параметрами, який трансформується в один з основних фундаменталізаційних треків післядипломної освіти вчителів математики. Закономірності виникнення науково-методичних проблем, пов'язаних з теоретичним та практичним супроводом цієї тематики, генеруються принциповою неможливістю запропонувати універсальні правила-орієнтири, алгоритми розв'язування задач з параметрами, хоча дані задачі, незважаючи на складність і нестандартність, як правило, не належать до класів задач олімпіадного характеру.

Великої уваги потребує методичний апарат дієвого поєднання аналітичних та графічних прийомів розв'язування рівнянь, нерівностей, систем з параметрами, в яких йдеться про кількість (наявність) розв'язків та про певні їхні властивості. Класичні технічні прийоми використання «допоміжної» координатної площини *Oxa* та/або методи дослідження на «основній» координатній площині *Oxy динамічних графічних моделей* задач з параметрами, метод *необхідних* умов (вибір «зручних» точок з подальшою перевіркою) знайшли свого висвітлення у фаховій літературі [3; 4; 6; 13; 14; 15] і традиційно докладно розглядаються на курсах підвищення кваліфікації. Водночас, з нашої точки зору на фундаменталізаційну парадигму профільної та професійної освіти, для певних класів задач формат підвищення кваліфікації вчителів має передбачати більш глибокий аналіз математичної «фактури» і удосконалення релевантних логічних схем, підготовку вчителів до самостійного створення задач підвищеного рівня складності, що й буде науково-практичним внеском до розвитку визначеної вище загальної проблематики.

Рівняння та нерівності з модулями, функції, що задаються виразами з модулями, як відомо, є наскрізним компонентом змісту шкільної математичної освіти, особливо – на рівні профільного (поглибленого) вивчення математики. *Метою статті* є виокремлення та координація дидактичних зв'язків деяких типів задач з параметрами з нестандартним дослідженням найменших (найбільших) значень виразів з параметрами, які містяться під знаком модуля, та актуалізація відповідних теоретичних питань курсу алгебри та початків аналізу. Така мета є важливою для активізації набутих компетентностей як закріпленого освітнього результату – значного підвищення творчого потенціалу вчителя і постійної модернізації змісту неперервної освіти вчителів математики.

## Результати

Розгортання потрібної дидактико-методичної системи в лекційній та практичній роботі зі слухачами курсів підвищення кваліфікації відбувається *блоками-проєктами*, план яких наводимо далі. Слід звернути увагу на те, що для переважної більшості задач з учителями обов'язково розбираються й альтернативні способи розв'язування (зокрема, за допомогою згаданих вище графічних моделей, у тому числі й з використанням можливостей середовища WolframAlpha, інших засобів комп'ютерної математики). Вважаємо, що це є принципово важливим для пропедевтики подальшої роботи вчителів зі своїми учнями над таким теоретичним і задачним контентом.

**Блок І**. Методика побудови та вивчення *особливостей* графіків функцій, вирази яких містять знак модуля ($y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$). Елементарні перетворення графіків функцій. Побудова графіків «розкриванням» модулів на відповідних проміжках.

**Блок ІІ**. Спеціальні прийоми побудови графіків неперервних кусково-лінійних функцій вигляду $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i|x - \alpha_i| + kx + b$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ [17]. Питання обмеженості, опуклості таких функцій, «кутових» точок їхніх графіків і т. д. Модифікація цих прийомів для побудови графіків неперервних кусково-лінійних функцій іншого типу, які задаються виразами, що містять модулі.

**Задача**. *а*) Обґрунтувати (без побудови графіка) існування найменшого значення функції $f(x) = |x - 1| + 3|x - 3| - |x + 1| + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

*б*) Побудувати графік функції $f$, спираючись на матеріал блока ІІ.

*в*) Знайдіть $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

**Розв'язання**. Кусково-лінійна функція $f$ неперервна на всій числовій прямій. Візьмемо довільні числа $x' < -1$, $x'' > 3$ і переконаємось, що $k' = \frac{f(x') - f(-1)}{x' - (-1)} < 0$, $k'' = \frac{f(x'') - f(3)}{x'' - 3} > 0$. Функція $f$ спадає на проміжку $(-\infty; -1]$ і зростає на проміжку $[3; +\infty)$, і тому має на цих проміжках найменші значення – $f(-1) = 12$ і $f(3) = 4$ відповідно. Отже, існує $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 4$ – найменше із значень функції $f$ у «кутових» точках її графіка. Для побудови графіка замість розкривання модулів на проміжках, на які точки $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ розбивають числову пряму, достатньо обчислити значення функції $f$ в цих трьох точках і в обраних точках $x'$ і $x''$.

*Відповідь*: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 4$. ■

**Зауваження**. Кутові коефіцієнти $k'$ і $k''$ на проміжках, відповідно, $(-\infty; -1]$ і $[3; +\infty)$ можна обчислити так: $k' = (-1) + (-3) + 1 + 2 = -1$, $k'' = 1 + 3 - 1 + 2 = 5$.

**Задача**. *а*) Обґрунтувати різними способами (без побудови графіка) існування найменшого значення функції $f(x) = |x - 2| + |x - 1| + |x| + |2x + 1| + 2|x + 2|$, $x \in \mathbb{R}$.

*б*) Знайдіть $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

**Вказівка**. Окрім міркувань з попередньої задачі для доведення існування найменшого значення кусково-лінійної функції $f$ можна скористатись її опуклістю як суми опуклих донизу функцій. При цьому слід узяти до уваги, що функція $f$ обмежена знизу: $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ (навіть $f(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, адже рівняння $f(x) = 0$ коренів не має).

*Відповідь*: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \frac{15}{2}$. ■

**Зауваження**. Зрозуміло, що опукла донизу на множині $\mathbb{R}$ кусково-лінійна функція може бути необмеженою знизу і, відповідно, не мати найменшого значення. Зазначимо також, що функція, опукла на проміжку $(\alpha;\beta)$, $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$, є на ньому неперервною [7; 18].

**Задача**. Знайдіть усі значення параметра $a$, для яких рівняння $|3|x-a|-2| = 2-x$ має єдиний розв'язок.

**Розв'язання**. Методичною особливістю задачі можна вважати наявність параметра під знаком внутрішнього модуля, чим ускладнюється реалізація звичної для вчителів та учнів ідеї розкривання модулів, застосування правила-орієнтира для розв'язування рівнянь вигляду $|f(x)| = g(x)$. Для аналізу задачі можна побудувати графік рівняння $|3|x-y|-2| + x - 2 = 0$ (у тому числі й за допомогою середовища WolframAlpha).

Розв'яжемо задачу заміною $t = a - x$, якою параметр виводиться з-під знака модуля. Побудуємо графік функції $\varphi(t) = -t + |3|t| - 2|$. Функція $\varphi$ є неперервною та кусково-лінійною, і для побудови графіка достатньо обчислити значення функції $\varphi$ в точках $t = 0$, $t = -\frac{2}{3}$, $t = \frac{2}{3}$ і ще в двох точках: $t = t' < -\frac{2}{3}$, $t = t'' > \frac{2}{3}$.

*Відповідь*: $a = \frac{8}{3}$. ■

**Зауваження**. За графіком функції $\varphi$ неважко повністю охарактеризувати кількість розв'язків нашого рівняння в залежності від значень параметра $a$.

**Задача**. Знайдіть усі значення параметра $a$, для яких нерівність $|x-a| + |2x + a^2| > 1$ має місце для всіх $x \in \mathbb{R}$.

**Розв'язання**. Очевидно, що розв'язувати задачу «розкриванням» модулів на відповідних проміжках є технічно непростим завданням, оскільки, зокрема, слід розбирати різні випадки взаємного розташування на числовій прямій точок $x = a$ та $x = -\frac{a^2}{2}$. Утім, для будь-якого значення параметра $a$ неперервна обмежена знизу кусково-лінійна функція $f(x) = |x-a| + |2x + a^2|$ є опуклою донизу і має найменше значення $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min\left\{f(a), f\left(-\frac{a^2}{2}\right)\right\}$. Можна також скористатись і тим, що для $m = \min\left\{a; -\frac{a^2}{2}\right\}$, $M = \max\left\{a; -\frac{a^2}{2}\right\}$ функція $f$ спадає на множині $(-\infty; m]$ і зростає на множині $[M; +\infty)$.

Зводимо задачу до **рівносильної** задачі – розв'язування системи нерівностей

$$\begin{cases} f(a) > 1, \\ f\left(-\dfrac{a^2}{2}\right) > 1, \end{cases}$$

якою забезпечується виконання потрібної нам умови $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) > 1$.

*Відповідь*: усі $a \in \left(-\infty; -1-\sqrt{3}\right) \cup \left(-1+\sqrt{3}; +\infty\right)$. ■

**Задача**. Знайдіть найменше можливе значення виразу $|2x - y + 1| + |x - y| + |2y - 3|$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

**Розв'язання**. Для фіксованого $y$ розглянемо невід'ємну на всій числовій прямій неперервну опуклу донизу кусково-лінійну функцію $\varphi_y(x) = |2x - y + 1| + |x - y|$ і знаходимо $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} \varphi_y(x) = \varphi_y\left(\frac{1}{2}(y-1)\right) = \frac{1}{2}|y+1|$ (ми врахували, що $\varphi_y\left(\frac{1}{2}(y-1)\right) = \frac{1}{2}|y+1| \le \varphi(y) = |y+1|$). Залишається для $\psi(y) = \frac{1}{2}|y+1| + |2y-3|$ знайти $\min\limits_{y\in\mathbb{R}} \psi(y) = \psi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4}$. Знайдене найменше значення виразу досягається, якщо $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{2}$.

*Відповідь*: $\frac{5}{4}$. ■

**Задача**. Знайдіть усі значення параметра $a$, для яких графік функції $f(x) = (x+a)(|x-a+1|+|x-3|-2x+4a)$, $x \in \mathbb{R}$, має центр симетрії.

**Розв'язання**. Неважко звести задачу до вивчення графіка функції $\varphi(t) = t(|t-2a+1|+|t-a-3|-2t)$. Для $M = \max\{2a-1, a+3\}$ на проміжку $[M;+\infty)$ функція $\varphi$ буде лінійною, а на проміжку $(-\infty;m]$, де $m = \min\{2a-1,\ a+3\}$, функція $\varphi$ буде квадратичною.

*Відповідь*: таких значень $a$ не існує. ■

**Задача**. Знайдіть усі значення параметра $a$, для яких рівняння $4x - \big|3x - |x+a|\big| = 9|x-1|$ має розв'язки.

**Розв'язання**. На проміжку $(-\infty;1]$ неперервна функція $f(x) = 9|x-1| + \big|3x - |x+a|\big| - 4x$ строго спадає (оскільки вона є кусково-лінійною функцією, усі прямолінійні «ділянки» графіка якої мають від'ємні кутові коефіцієнти незалежно від значення $a$). Аналогічно, на проміжку $[1;+\infty)$ функція $f$ строго зростає. Відтак, $f(1) = \min\limits_{\mathbb{R}} f$, і умова задачі **рівносильна** виконанню нерівності $f(1) \le 0$.

*Відповідь*: усі $a \in [-8;6]$. ■

**Блок III**. Розширення класів функцій, для яких аналогічними прийомами розв'язуються задачі з параметрами. У першу чергу пропонується вводити до виразів, якими задаються функції, «квадратичні доданки», тобто розглядати кусково-квадратичні функції (допускається й більш загальна ситуація, коли на деяких проміжках функції можуть бути лінійними), що дозволяє робити певні кроки в межах поглибленого чи факультативного (гурткового) вивчення математики ще на етапі базової школи.

Звернемо увагу на той простий факт, що коли числову функцію $f$ задано на множині $X$, яка подається у вигляді об'єднання (навіть не обов'язково диз'юнктного) скінченної кількості множин ($X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$), на кожній з яких існує найменше значення функції $f$ ($m_i = \min\limits_{X_i} f$), то існує $\min\limits_{X} f = \min\limits_{1 \le i \le n} m_i$. Типовою для нашої мети є модифікація для *неперервної* на множині всіх дійсних чисел функції $f$ з поданням $\mathbb{R}$ у вигляді $\mathbb{R} = (-\infty;\xi_1] \cup [\xi_1;\xi_2] \cup [\xi_2;\xi_3] \cup \ldots \cup [\xi_{n-1};\xi_n] \cup [\xi_n;+\infty)$. Якщо існують $m_0 = \min\limits_{x \in (-\infty;\xi_1]} f(x)$, $m_n = \min\limits_{x \in [\xi_n;+\infty)} f(x)$, то, позначивши $m_i = \min\limits_{x \in [\xi_i;\xi_{i+1}]} f(x)$, $1 \le i \le n-1$ (існування $m_i$, $1 \le i \le n-1$, випливає з неперервності функції $f$), матимемо, що існує $\min\limits_{\mathbb{R}} f = \min\limits_{0 \le i \le n} m_i$. Зрозуміло, що під час розв'язування задач аналогічні факти нескладно адаптувати і для інших подібних ситуацій.

**Задача**. Знайдіть усі значення параметра $a$, для яких нерівність $x^2 - |x-a| - |x-1| \ge -3$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

**Розв'язання**. Для кожного значення параметра $a$ розглядаємо неперервну функцію $f(x) = x^2 - |x-a| - |x-1|$, *схематично* вивчаємо властивості її графіка, усі його «характерні» точки (точки $x = 1$, $x = a$, серед яких містяться «кутові» точки; точки $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, які *можуть* бути абсцисами вершин відповідних частин парабол). Абсциси «кутових» точок розбивають числову пряму на два (якщо $a = 1$) або три (якщо $a \ne 1$) проміжки, на *замиканні* кожного з яких функція $f$ задається квадратним тричленом з додатним старшим коефіцієнтом, а тому має там найменше значення. З наведеного вище міркування випливає існування $\min\limits_{\mathbb{R}} f = \min\{f(a),\ f(0),\ f(-1),\ f(1)\}$ (важливо, що «дублювання» та / або залучення «зайвих» точок не впливає на коректність розв'язання). Залишається забезпечити одночасне виконання всіх чотирьох нерівностей: $f(a) \ge -3$, $f(0) \ge -3$, $f(-1) \ge -3$, $f(1) \ge -3$ (тобто розв'язати утворену систему чотирьох нерівностей).

*Відповідь*: усі $a \in [-2;1]$. ■

**Задача**. Знайдіть усі значення параметра $a$, для яких нерівність $x^2 + x + |x - a| \le -\frac{2}{9}$ має розв'язки.

**Розв'язання**. Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ неперервна функція $f(x) = x^2 + x + |x - a|$ має найменше значення на всій числовій прямій, оскільки вона має найменші значення на проміжках $(-\infty; a]$ і $[a; +\infty)$, на яких її графік є частиною парабол, відповідно, $y = x^2 + a$ і $y = x^2 + 2x - a$ (варто звернути увагу й на опуклість функції $f$ – суми опуклих донизу функцій, хоча для нашого міркування цей факт безпосереднього значення не має). Задача зводиться до **рівносильної** умови $\min\limits_{\mathbb{R}} f \le -\frac{2}{9}$, яка забезпечується оцінкою значень нашої функції в трьох «характерних» точках: $x = a$, $x = 0$, $x = -1$ (ми враховуємо всі можливі значення абсцис «кутових» точок і вершин названих парабол). Отже, нам потрібно, щоб виконувалась нерівність $\min\{f(a),\ f(0),\ f(-1)\} = \min\{|a|,\ |a+1|,\ a^2 + a\} \le -\frac{2}{3}$. Достатньо розглянути $a \in [0; 1]$ та розв'язати нерівність $a^2 + a \le -\frac{2}{3}$.

*Відповідь*: усі $a \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right]$. ■

**Задача**. Знайдіть усі значення параметра $a$, для яких найменше значення функції $f(x) = 3|x - a| + |x^2 + x - 2|$, $x \in \mathbb{R}$, менше, ніж 2.

**Розв'язання**. Функція $f$ є неперервною, причому – незалежно від значення $a$ – вона має найменші значення на відрізку $[-2; 1]$ і на кожному з проміжків $(-\infty; -2]$, $[1; +\infty)$ (на двох останніх півпрямих її графік утворюється частинами квадратичних парабол з додатним старшим коефіцієнтом), звідки випливає, що функція $f$ має найменше значення на всій числовій прямій. Легко перевірити, що абсциси «кутових» точок графіка й абсциси вершин відповідних частин парабол можуть набувати лише значень $x = -2$, $x = 1$, $x = a$ Маємо, що $\min\limits_{\mathbb{R}} f = \min\{f(a),\ f(-2),\ f(1)\} = \min\{3|a - 1|,\ 3|a + 2|,\ |a^2 + a - 2|\}$. Для знаходження множини $A$ розв'язків нерівності $\min\limits_{\mathbb{R}} f < 2$ зручніше знайти множину $\mathbb{R} \backslash A$ розв'язків нерівності $\min\limits_{\mathbb{R}} f \ge 2$, **рівносильну** системі

$$\begin{cases} 3|a - 1| \ge 2, \\ 3|a + 2| \ge 2, \\ |a^2 + a - 2| \ge 2. \end{cases}$$

*Відповідь*: усі $a \in \left(-\frac{8}{3}; -1\right) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right)$. ■

**Задача**. Знайдіть усі значення параметра $a$, для яких нерівність $x^2 + |x - a| \le 2$ виконується принаймні для одного **невід'ємного** дійсного числа $x$.

**Розв'язання**. Для кожного значення параметра $a$ розглянемо функцію $f(x) = x^2 + |x - a| - 2$, яка має найменше значення на проміжку $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$.

Якщо $a \le 0$, то $\min\limits_{x \in \mathbb{R}_+} f(x) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}_+} (x^2 + x - a - 2) = f(0) = -a - 2$.

Візьмемо $a > 0$. Тоді $\min\limits_{x \in \mathbb{R}_+} f(x) = \min\left\{\min\limits_{x \in [0; a]} f(x);\ \min\limits_{x \in [a; +\infty)} f(x)\right\}$. Для $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ $\min\limits_{x \in [0; a]} f(x) = \min\limits_{x \in [0; a]} (x^2 - x + a - 2) = f(a) = a^2 - 2$, $\min\limits_{x \in [a; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = a - 2\frac{1}{4}$. Оскільки $a - 2\frac{1}{4} \le a^2 - 2$, то $\min\limits_{x \in \mathbb{R}_+} f(x) = a - 2\frac{1}{4}$. Аналогічно – з таким самим результатом – розбирається випадок $a \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Ми встановили, що для $a > 0$ $\min\limits_{x \in \mathbb{R}_+} f(x) = a - 2\frac{1}{4}$. Остаточну відповідь ми отримуємо як $[-2; 0] \cup \left(0; 2\frac{1}{4}\right] = \left[-2; 2\frac{1}{4}\right]$.

Серед інших способів розв'язування даної задачі виділимо ще й такий, що використовує **рівносильність** нерівності $|u| \le v$ та системи

$$\begin{cases} u \le v, \\ u \ge -v \end{cases}$$

(така рівносильність має місце незалежно від знака $v$). Для отримання відповіді на «допоміжній» координатній площині $Oxa$ ми розглядаємо множину $Q = \{(x; a): x^2 + x - 2 \le a \le -x^2 + x + 2,\ x \ge 0\}$.

*Відповідь*: усі $a \in \left[-2; 2\frac{1}{4}\right]$. ■

**Задача**. Знайдіть усі такі пари чисел $a$ і $b$, для яких нерівність $|2x^2 + ax + b| > 1$ не має розв'язків на відрізку $[1; 3]$.

**Розв'язання**. Для всіх $x \in [1; 3]$ має виконуватися умова $-1 \le 2x^2 + ax + b \le 1$. Узявши $x = 1, x = 2, x = 3$, ми з **необхідністю** одержимо систему

$$\begin{cases} a + b \le -1, \\ 3a + b \le -17, \\ 2a + b \ge -9. \end{cases}$$

На координатній площині $Oab$ прямі $a + b = -1$, $3a + b = -17$, $2a + b = -9$ мають єдину спільну точку $M(-8; 7)$. Неважко переконатися, що ця точка й буде єдиним розв'язком системи трьох лінійних нерівностей. Слід обов'язково перевірити, що пара чисел $a = -8$, $b = 7$ насправді задовольняє умову задачі.

Зауважимо, що вибір $x = 2$ для підстановки визначається рівнянням $2x^2 + ax + b = -1$, в якому $a = -8$, $b = 7$ є координатами точки перетину прямих $a + b = -1$, $3a + b = -17$.

Оскільки ми приділяємо особливу увагу методам, пов'язаним із **рівносильними** переходами, розглянемо інший підхід.

Потрібно, щоб виконувалася нерівність $\max\limits_{x \in [1;3]} f(x) \le 1$, де $f(x) = |2x^2 + ax + b|$. Нерівності $f(1) \le 1$ і $f(3) \le 1$ (тобто, відповідно, $-3 \le a + b \le -1$ і $-19 \le 3a + b \le -17$) задають на координатній площині $Oab$ паралелограм $KLMN$ з вершинами $K(-8; 5)$, $L(-9; 8)$, $M(-8; 7)$, $N(-7; 4)$, і тому з необхідністю $-9 \le a \le -7$. Оскільки $x_0 = -\frac{a}{4}$ – абсциса вершини параболи $y = 2x^2 + ax + b$, $x_0 \in \left[\frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right] \subset [1; 3]$, то нерівність $\max\limits_{x \in [1;3]} f(x) \le 1$ є **рівносильною** нерівності $\max\left\{f(1),\ f(3),\ f\left(-\frac{a}{4}\right)\right\} \le 1$, тобто – системі нерівностей

$$\begin{cases} -3 \le a + b \le -1, \\ -19 \le 3a + b \le -17, \\ -1 \le b - \dfrac{a^2}{8} \le 1. \end{cases}$$

Дану систему зручно розв'язувати графічно. Парабола $b = \frac{a^2}{8} - 1$ проходить через точку $M$, якою визначається, як неважко переконатися, єдиний розв'язок системи. Пара значень $a = -8$, $b = 7$, отримана в описаний спосіб, перевірки не потребує.

*Відповідь*: $a = -8$, $b = 7$. ■

**Зауваження**. Серед усіх зведених квадратних тричленів $h(t) = t^2 + mt + n$ знайдемо такий, для якого $M(h) = \max\limits_{t \in [-1;1]} |h(t)|$ – *відхилення від нуля* на відрізку $[-1; 1]$ – набуває найменшого можливого значення. Маємо: $4M(h) \ge |h(-1)| + 2|h(0)| + |h(1)| \ge |h(-1) - 2h(0) + h(1)| = 2$, $M(h) \ge \frac{1}{2}$. Для $h(t) = t^2 - \frac{1}{2}$ виконується рівність $M(h) = \frac{1}{2}$. Покажемо, що для інших зведених квадратних тричленів $h(t) = t^2 + mt + n$ $M(h) > \frac{1}{2}$. Якщо $M(h) \le \frac{1}{2}$, то $-\frac{1}{2} \le h(-1), h(0), h(1) \le \frac{1}{2}$. Остання система трьох подвійних нерівностей має єдиний розв'язок: $m = 0$, $n = -\frac{1}{2}$.

Нерівність $\max_{x\in[1;3]}|2x^2+ax+b|\leq 1$, яку розглянуто вище, є рівносильною умові $\max_{t\in[-1;1]}|t^2+mt+n|\leq\frac{1}{2}$ (ми зробили такі заміни: $x=t+2$, $m=\frac{a}{2}+4$, $n=a+\frac{b}{2}+4$).

Відтак, розібрана задача фактично пов'язана з класичною теорією многочленів $n$-го степеня (для $n=2$) з найменшим відхиленням від нуля на заданому відрізку (многочленів Чебишова). Многочлени Чебишова є надзвичайно цікавим та корисним об'єктом для опрацювання з учителями, студентами математичних спеціальностей педагогічних університетів, а також для проведення позакласних занять з талановитими школярами.

## Висновки

Запропонований *блочно-проєктний* підхід до конструювання стислої дидактико-методичної системи забезпечує *наскрізність* і *цільність* програм підвищення кваліфікації вчителів математики, які передбачають опрацювання зазначеної тематики. Ми бачимо, як під час занять на курсах виникають (чи моделюються викладачем) проблемні ситуації (фактично – мініпроєкти), що актуалізують різні складові однієї з провідних змістових ліній – функціональної. Унаслідок цього вчителі потрапляють до *концентричних* кіл складних питань дослідження функцій, побудови графіків, нових понять, теорем, комбінації нестандартних методів тощо. Блоки теоретичного та задачного характеру можуть розподілятися, навіть, і між різними фаховими модулями, створюючи, у тому числі, мотиваційні передумови для підсилення предметно-методичної ідентичності сучасного вчителя математики (оскільки вчитель матиме широкі можливості вибору навчального матеріалу на різних етапах власної професійної траєкторії), його конкурентноспроможності. До того ж, результати статті стануть у пригоді під час підготовки студентів математичних спеціальностей до майбутньої педагогічної діяльності, роботи зі школярами з високим пізнавальним інтересом у галузі математики.

Проведене науково-методичне дослідження сприяє реалізації принципу сучасного характеру знань у парадигмі фундаменталізації неперервної освіти вчителів, орієнтують їх на власну пошукову ініціативу й розширення дидактичної ресурсної основи профілізації шкільної математичної освіти, роботи з математично обдарованими учнями. Подальшого вивчення потребують теоретичні та практичні питання, включення яких до програм підвищення кваліфікації дозволяють розвивати проєктувальні компетентності, логічне й креативне мислення вчителів математики, у тому числі й удосконалювати навички використання для аналізу та розв'язування складних задач з параметрами можливостей динамічного математичного середовища GeoGebra, системи комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica, інших програмних засобів та онлайн-сервісів математичного спрямування.

## Список використаних джерел

1. Гончаренко, С. У. (2008). Фундаменталізація освіти як дидактичний принцип. *Шлях освіти*, 1(47), 2–6.
2. Гончаренко, С. У. (2008). Фундаменталізація професійної освіти як дидактичний принцип. *Теорія і практика управління соціальними системами: філософія, психологія, педагогіка, соціологія*, 2, 87–91.
3. Горнштейн, П. І., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2004). *Задачі з параметрами*. Тернопіль, Підручники & Посібники.
4. Грамбовська, Л. В., & Сорока, В. В. (2012). Удосконалення умінь розв'язувати лінійні рівняння з параметрами як один з аспектів професійної компетентності вчителів математики. *Математика в сучасній школі*, 3(126), 43–47.

5. Захарчук, Н. В. (2015). Принципи відбору змісту освіти у контексті фундаменталізаційних процесів. *Вісник Національного авіаційного університету. Серія: Педагогіка. Психологія*, 6. URL: https://jrnl.nau.edu.ua/index.php/VisnikPP/article/view/10199.
6. Лященко, Г. М., Лященко, М. Я., & Рафальська, М. В. (2015). Розв'язування деяких задач з параметрами. *Математика в рідній школі*, 11(170), 9–12.
7. Мітельман, І. М. (2004). Про доведення неперервності опуклих функцій. *Математика в школах України*, 6(54), 8–9.
8. Мітельман, І. М. (2019). Розвиток предметно-галузевих компетентностей учителів математики в контексті формування згорнутих дидактичних структур. У В. В. Ягоднікова (Ред.), *Професійна компетентність сучасного педагога: методологія, теорія, методика, практика* (с. 241–257). Одеса, видавець Букаєв Вадим Вікторович.
9. Мітельман, І. М. (2021). Синхронізація спеціалізованих компетентностей під час підготовки учнів до математичних олімпіад. *Матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції «Педагогічна наука і освіта у сучасному вимірі: проблеми і перспективи розвитку»* (с. 198–204). Одеса, видавець Букаєв Вадим Вікторович.
10. Мітельман, І. М. (2021). Особливості моделювання спеціалізованих методичних кейсів у контексті підвищення кваліфікації вчителів математики. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини*, 2, 137–149. DOI: https://doi.org/10.31499/2307-4906.2.2021.236672.
11. Мітельман, І. М. (2022). Формування навичок знаходження найбільших значень функцій трьох змінних під час розв'язування деяких олімпіадних задач. *Збірник наукових праць Сумського державного педагогічного університету «Актуальні питання природничо-математичної освіти»*, 2(20), 64–74. DOI: 10.5281/zenodo.7426573. URL: https://zenodo.org/record/7426573#.ZDR_DfZBzPA.
12. Мітельман, І. М. (2023). Дидактичні ресурси agile-стратегій підготовки вчителів до роботи з математично обдарованими учнями. *Наша школа: науково-практичні студії*, 1(1), 65–73. URL: https://nashashola.oano.od.ua.
13. Нарихнюк, Н. Ю., Корінчук, Н. Ю., & Лейбик, Л. І. (2021). Аналітичні та графічні прийоми розв'язування завдань з параметрами під час підготовки до ЗНО. *Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах*, 76(2), 66–71. DOI: https://doi.org/10.32840/1992-5786.2021.76-2.11.
14. Прус, А. В., & Швець, В. О. (2015). Рівняння і нерівності з параметрами в шкільному курсі математики (програма елективного курсу). *Математика в рідній школі*, 5(164), 2–7.
15. Прус, А. В., & Швець, В. О. (2016). *Задачі з параметрами в шкільному курсі математики*. Житомир, Рута.
16. Семенець, С. П. (2016). Задачний підхід до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів. *Математика в рідній школі*, 4(175), 14–18.
17. Ушаков, Р. П. (2005). Кусково-лінійна функція та деякі задачі, пов'язані з нею. *Математика в школах України*, 5(89), 6–7; 6(90), 2–4; 7(91), 9–12; 8(92), 7–9; 9(93), 7–9.
18. Hardy, G.H., Littlewood, J.E., & Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge.