ДЕЯКІ ТИПИ ОЛІМПІАДНИХ НЕРІВНОСТЕЙ У КОНТЕКСТІ АНАЛІЗУ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ: ДИДАКТИЧНИЙ ВИМІР ГЕНЕРАЛІЗАЦІЇ ЗНАНЬ

SOME TYPES OF OLYMPIAD INEQUALITIES IN THE CONTEXT OF MULTIVARIABLE CALCULUS: A DIDACTIC PERSPECTIVE ON KNOWLEDGE GENERALIZATION

УДК 378.046.4:[373.5.016:51]:[512.13+517.2]
DOI https://doi.org/10.32782/ip/99.8
Стаття поширюється на умовах ліцензії відкритого доступу CC BY 4.0

Мітельман І.М.,
orcid.org/0000-0002-9817-6690
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри методики викладання і змісту освіти
Комунального закладу вищої освіти «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради»

У статті продовжуються дослідження модернізації дидактичних ресурсів для навчання обдарованих учнів та поглибленого вивчення математики у профільній школі в умовах зростання складності завдань інтелектуальних змагань вищого рівня. Показано, що цілісність математичної підготовки та формування здатності школярів переносити засвоєні методи на нові евристичні ситуації ґрунтується на дидактико-методичній технології генералізації знань, поєднаній з освітніми agile-стратегіями. Основну увагу приділено методиці доведення нерівностей як одному з найдинамічніших напрямів сучасної олімпіадної підготовки. Автор аналізує синтез алгебраїчних і функціональних підходів у контексті застосування, насамперед, апарату математичного аналізу – диференціального числення функцій кількох змінних, методу умовних множників Лагранжа та pqr-методу. Визначено ефективність створення компактних навчальних систем «теорія–задачі» для інтеграції класичних олімпіадних прийомів із теоретичними концепціями вищої математики, не представленими в програмі старшої школи. Важливим методичним інструментом виступає підбір задач для порівняння різних способів розв'язування та мотивації учнів опановувати принципово нові для них математичні ідеї. Запропоновані дидактико-методичні кейси мають кластерну архітектуру, яка сприяє удосконаленню змісту підвищення кваліфікації вчителів математики, синхронізації компетентностей учнів, педагогів та студентів-математиків педагогічних університетів. Підкреслено методологічне значення Onto-Semiotic Approach та Extended Theory of Connections для пояснення й класифікації математичних зв'язків, практико-процесуальних аспектів, породжених олімпіадними задачами та потребами в теоретичних узагальненнях. Доведено, що навчання обдарованих школярів вимагає збалансованого поєднання інтуїтивно-наочного рівня засвоєння нових понять і спеціальних методів із використанням комп'ютерних засобів моделювання та візуалізації. Результати дослідження спрямовані на створення передумов якісної конвергенції шкільної та вищої математичної освіти, випереджального розвитку талановитих учнів і підвищення професійної майстерності вчителів математики.

Ключові слова: *методика навчання математики, підвищення кваліфікації вчителів, синхронізація компетентнісних систем учителя й учнів, генералізація знань, дидактичні ресурси, освітні agile-стратегії, математично обдаровані учні, доведення олімпіадних нерівностей, функції кількох змінних, метод множників Лагранжа, pqr-метод.*

In this article, research on the modernization of didactic resources for teaching gifted students and for the advanced study of mathematics in specialized schools is continued, under the conditions of increasing complexity of tasks in high-level intellectual competitions. It is shown that the integrity of mathematical training and the development of students' ability to transfer acquired methods to new heuristic situations is based on the didactic-methodological technology of knowledge generalization, combined with agile learning strategies. Particular attention is paid to the methodology of proving inequalities as one of the most dynamic areas of modern Olympiad preparation. The author analyzes the synthesis of algebraic and functional approaches in the context of applying, above all, the apparatus of multivariable calculus, the Lagrange multipliers method, and the pqr-method. The effectiveness of creating compact learning systems «theory–problems» for integrating classical Olympiad techniques with theoretical concepts of higher mathematics, not represented in the high school curriculum, is determined. An important methodological tool is the selection of problems for comparing different solution methods and motivating students to master fundamentally new mathematical ideas. The proposed didactic-methodological cases have a cluster architecture that contributes to improving the content of teacher professional development, synchronizing the competencies of students, teachers, and mathematics students of pedagogical universities. The methodological significance of the Onto-Semiotic Approach and the Extended Theory of Connections is emphasized for explaining and classifying mathematical relations and practice-processual aspects generated by Olympiad problems and the need for theoretical generalizations. It is proved that teaching gifted students requires a balanced combination of intuitive-visual acquisition of new concepts and specialized methods with the use of computer-based modeling and visualization tools. The results of the study are aimed at creating prerequisites for qualitative convergence of school and higher mathematics education, the advanced development of talented students, and the enhancement of teachers' proficiency.

Key words: *mathematics teaching methodology, professional teacher development, synchronization of the competence systems of teacher and students, knowledge generalization, didactic resources, agile learning strategies, mathematically gifted students, proving olympiad inequalities, multivariable calculus, Lagrange multipliers method, pqr-method.*

Постановка проблеми в загальному вигляді. Академічна профілізація старшої школи на основі поглибленого вивчення математики передбачає орієнтацію на результативну участь обдарованих учнів у математичних олімпіадах та конкурсах-захистах Малої академії наук. Зростання складності завдань сучасних математичних змагань і підвищення вимог до учнівських науково-дослідницьких робіт потребує трансформації підходів до навчання, синхронізації компетентностей учасників освітнього процесу [9] та генералізації знань (змісту освіти).

Національна доктрина розвитку освіти, затверджена Указом Президента України від 17.04.2002 № 347/2002, визначає *фундаменталізацію* освіти як обов'язкову умову її модернізації. Цей принцип проголошено також одним із пріоритетів Болонського процесу (меморандум ЮНЕСКО, 1994 р.). Український методолог С. Гончаренко, розглядаючи фундаменталізацію освіти як універсальну дидактичну категорію, наголошував, що завдання фундаментальної освіти полягає у створенні оптимального середовища та наукової інформаційної бази для формування гнучкого мислення, засвоєння сучасної методології пізнання та виховання внутрішньої потреби в саморозвитку й самоосвіті впродовж життя.

Професіоналізація математичної освіти нерозривно пов'язана з фундаменталізацією та визначається рівнем підготовки майбутніх учителів, їх неперервною освітою, а також розвитком спеціалізованих компетентностей мотивованих учнів у профільних класах [13]. Сучасні дослідники поєднують принципи фундаменталізації й професіоналізації в межах єдиного процесу генералізації знань – змісту математичної освіти на всіх її рівнях. Це значною мірою означає концентрацію навчального матеріалу та дидактичних ресурсів навколо ключових теоретичних розділів і систем навчання розв'язування задач [16]. Генералізація знань як дидактико-методична технологія спрямована на забезпечення цілісності математичної освіти – перехід від об'єктів узагальнення (окремих фактів, прикладів, задач) до узагальнених знань (понять, теорем, методів, алгоритмів, закономірностей тощо). Вона формує здатність бачити спільне в різних математичних явищах, будувати абстрактні моделі, переносити засвоєні знання на нові ситуації, зокрема евристичного характеру. У цьому контексті особливе значення має методика розв'язування задач підвищеної складності, передусім олімпіадних, які є не лише засобом реалізації високорівневих когнітивних здібностей, а й інструментом розвитку системно-варіативного мислення.

Сформувалися й розширюються тематичні напрями, що межують та поєднуються з програмами поглибленого вивчення математики, елективними курсами та фундаментальними університетськими дисциплінами (теорія чисел, застосування комплексних чисел, вибрані розділи комбінаторики, теорія функціональних рівнянь, теорія многочленів, методи доведення нерівностей засобами математичного аналізу тощо). Водночас джерелом багатьох олімпіадних задач є розділи вищої математики, актуалізація яких навіть для здібних учнів залишається складним завданням. Їхні витоки часто «приховуються» від учасників, учителів і тренерів, що знижує ефективність підготовки, якщо вона ґрунтується лише на аналізі створених для демонстрації учням дещо штучних евристичних розв'язань.

У післядипломній освіті простежується тенденція зниження уваги до цієї проблематики. Це зумовлено як концентрацією курсів підвищення кваліфікації на інших об'єктивно важливих напрямах модернізації школи, так і методичною інертністю частини педагогів у підтримці спеціальних математичних знань, здобутих в університеті. Без інтеріоризації та практичного застосування ці знання швидко втрачають операційну цінність. Подолання суперечностей між високими вимогами до олімпіадної підготовки учнів, реальним станом математичних компетентностей учителів, підвищенням кваліфікації, якістю навчання студентів-математиків педагогічних університетів та потребами держави у кадрах для наукоємних сфер, підготовка яких мусить розгортатись на платформі профілізації старшої школи, є викликом і водночас стимулом розвитку педагогіки математики. Окреслені проблеми стосуються не лише методики роботи з вузьким колом орієнтованих на науковий «спорт» учнів, а й виходять далеко за її традиційні межі, набуваючи системного характеру.

За умов можливих змін у концепції математичної освіти в 10–12 класах профільної школи необхідне ефективне дидактико-методичне управління ризиками надмірного накопичення інформації та методів розв'язування задач. Це має запобігати дублюванню, формуванню хибних асоціацій і некоректному застосуванню теорії. Відтак потребує переосмислення збалансована присутність у деяких сегментах шкільної математичної освіті, підвищення кваліфікації вчителів теоретичного й практичного матеріалу, заснованого на предметному рівні вищої математичної освіти.

Аналіз актуальних досліджень і публікацій. Дидактичні ресурси сучасної підготовки обдарованих учнів до математичних змагань високого рівня традиційно перебувають у центрі численних науково-методичних досліджень і педагогічних практик. Одним із найдинамічніших напрямів цієї роботи є доведення нерівностей, що підтверджується постійним ускладненням завдань математичних олімпіад: від використання обмеженого переліку класичних нерівностей три–чотири

десятиліття тому до широкої номенклатури спеціальних теорем, методів та допоміжних результатів, які нерідко є дидактичною трансформацією наукових здобутків професійних математиків.

Нерівності як задачні об'єкти вже давно розглядаються у поєднанні алгебраїчного й функціонального процедурно-операційного підходів. Тому навчання їх доведення, з одного боку, інтегрує майже всі змістові лінії шкільної математичної освіти, а з іншого – потребує осмислення та випереджальної адаптації ідей окремих розділів вищої математичної освіти. Це важливо як для результативної підготовки до учнівських олімпіад, так і для занять зі спеціальних математичних дисциплін із майбутніми вчителями та під час підвищення кваліфікації педагогів.

Функціональний аспект складних задач на доведення нерівностей передбачає активне використання апарату математичного аналізу для дослідження функцій. У зв'язку з цим виділимо присвячені систематизації, науково-методичному узагальненню великих обсягів задачного й теоретичного матеріалу роботи таких дослідників і педагогів, як T. Andreescu, V. Cîrtoaje, Z. Cvetkovski, O. Mushkarov, L. Stoyanov, K. Li, М. Гаєвський, І. Ібатулін, Л. Ізюмченко, І. Ключник, Т. Колесник, З. Кравченко, А. Лепес, О. Мартиненко, Н. Седракян, А. Сліпенко, Я. Чкана, Я. Бродський та ін. В. Радченко розкриває суттєві методичні й математичні особливості застосування диференціального числення функцій кількох змінних у доведеннях олімпіадних нерівностей. Завдяки публікаціям M. Knudsen, Ph. Tran, М. Розенберга та ін. у практику підготовки учнів увійшов pqr-метод доведення деяких типів симетричних і циклічних нерівностей із трьома змінними.

Автор у цій статті та інших своїх наукових розвідках (наприклад, [9–11; 13]) послідовно розвиває ідею створення компактних дидактичних комплексів «теорія–задачі» на основі методологічних принципів С. Семенця щодо розвивальної наступності, формувальної задачної природи цілісності навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів. Ці принципи поширюються на рівень синхронізації зон найближчого математичного розвитку різних категорій здобувачів освіти та відповідних зон фахового предметно-методичного компетентнісного розвитку вчителя, зокрема у системі інституційного підвищення кваліфікації.

Дидактичний ресурс розглядається у вимірі загальної методології освітніх agile-стратегій (R. Andersson, L. Bendix, A. Chan та ін.), що передбачають створення робочих ATLM-продуктів (Agile Teaching/Learning Methodology) для педагогів та XP-продуктів (eXtreme Pedagogy) як конкретних працюючих інструментів для здобувачів освіти. У контексті підготовки вчителів до роботи з математично обдарованими школярами ці підходи проаналізовано й узагальнено у статті [13].

Також вважаємо, що на дидактико-методичне проєктування траєкторій навчання математики, змісту роботи з обдарованими учнями впливають численні роботи іспанського вченого J. Godino та послідовників його школи педагогіки математики, в яких запропоновано **OSA** – *Onto-Semiotic Approach* (онто-семіотичний підхід) для оцінки дидактичної придатності (відповідності освітнього процесу цілям і ресурсам), пояснення в поєднанні з **ETC** – *Extended Theory of Connections* (розширеною теорією взаємозв'язків) того, як і які математичні об'єкти й процеси реально формуються та закріплюються у свідомості здобувачів математичної освіти, і як їх можна коригувати та розвивати.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Науково-методологічний аналіз і наукових джерел, досвід підготовки учнів до інтелектуальних змагань, створення завдань для їх проведення, робота з учителями математики в системі післядипломної освіти показують відчутну недостатність систематичного науково-методичного супроводу впровадження саме методів дослідження функцій кількох змінних, актуалізованих у вищій математичній освіті (за потреби – з адаптацією для математично обдарованих учнів старшої школи) в теорію й практику навчання доведення нерівностей математичних олімпіад високого рівня. Це зумовлює необхідність дослідження шляхів створення для означеного кола питань прикладів ATLM-робочих продуктів та XP-робочих продуктів як компактних (що важливо для організації занять) опціональних дидактичних комплексів, методичний кейсів, до яких інтегруються нові математичні поняття, теореми і теоретичні факти, ланцюжки взаємопов'язаних мультиідейних задач, прийоми порівняння різних розв'язань одних і тих самих задач, виявлення можливих прихованих математичних джерел олімпіадних задач тощо.

Мета статті полягає у формуванні та аналізі продуктивного у контексті освітніх agile-стратегій дидактико-методичного кейсу кластерної архітектури – евристично орієнтованого комплексу теоретичного матеріалу й задач математичних олімпіад високого рівня, пов'язаних із доведенням нерівностей, який може впливати на поглиблену профільну математичну підготовку обдарованих учнів з точки зору потреб і можливостей якісної конвергенції шкільної та вищої математичної освіти, створювати передумови для випереджального наукового зростання талановитих школярів, синхронізації компетентнісних систем учнів, учителів, студентів – майбутніх учителів математики. Основний зміст кейсу визначається порівнянням різних класичних суто олімпіадних прийомів, формально доступних у межах базової шкільної олімпіадної

підготовки, із реальними шляхами й методичною технікою застосування до тих самих задач підходів, притаманних вивченню функцій кількох змінних: елементів теорії екстремумів (з виділенням методу умовних множників Лагранжа), pqr-методу тощо. Досягнення цієї мети ґрунтується на ретельному доборі релевантного за обсягом та якістю «ілюстративного» матеріалу, який об'єднує повноцінну комбінованість математичних ідей і методів із обов'язковими сьогодні комп'ютерними засобами візуалізації та моделювання теоретичних положень і фрагментів розв'язування.

Виклад основного матеріалу. Доведення олімпіадних нерівностей суттєво спирається на розвинених навичках роботи з функціями декількох змінних, розумінні математичної сутності цього об'єкту. Складним є методичний шлях перебудови математичного мислення здобувачів освіти від звичного аналітичного та візуально-графічного сприйняття залежності одної числової величини від іншої числової величини до залежності від кількох числових величин. При цьому методи та окремі розв'язання, що зводяться до евристичних алгебраїчних перетворень виразів із декількома змінними, зазвичай не виводять із «*зони когнітивного комфорту*», хоча інколи є по-справжньому важковідшукуваними, особливо – в умовах обмеженого часу.

Ми вважаємо, що в навчанні доведення олімпіадних нерівностей у контексті роботи з функціями кількох змінних найбільший дидактичний ефект досягається в інтеграції «елементарних» способів розв'язування, універсальних потужних методів математичного аналізу з нетривіальною алгебраїчною реалізацією та особливих прийомів *редукції* – зменшення кількості змінних. Наше дослідження продовжує дидактико-методичну лінію статті [11] на закріплення статусу формування навчальних систем «теорія–задачі» (дидактичних комплексів) як одного з основних інструментів науково-методичного супроводу підготовки талановитих учнів до математичних змагань, включаючи постійну модернізацію змісту предметно-методичної підготовки студентів-математиків педагогічних університетів та неперервної освіти творчого вчителя. Багаторічний досвід підготовки учнів до олімпіад, проведення науково-практичних семінарів, консультацій і тренінгів підтверджує недоцільність і неможливість – якщо йдеться про складні розділи математичного аналізу – розгортання повноцінної теоретичної картини з формально бездоганними означеннями і доведеннями. Водночас не можна обмежуватись формальною процедурною схемою «задача → типізація задачі → вибір методу → алгоритм застосування методу», адже методика розв'язування олімпіадних задач є спеціалізованою платформою навчання–вчення професійно зорієнтованих математичних знань не лише з точки зору їх безпосереднього застосування, а й з позиції долучення до розвитку сучасної математичної науки. І тому, вважаємо, створення та використання подібних дидактичних комплексів з нашої точки зору мусить орієнтуватись на поєднання Extended Theory of Connections (пошук, встановлення, класифікація математичних зв'язків, породжених складною (олімпіадною) задачею) із Onto-Semiotic Approach (онто-семіотичним підходом), який пояснює, як саме ці зв'язки виникають і функціонують у процесі математичної діяльності – розв'язуванні олімпіадної задачі. Онто-семіотичний теоретико-методологічний рамковий підхід у нашій ситуації об'єднує онтологічний аспект (математичні об'єкти – поняття, процедури, теореми, моделі та ін. як компоненти системи математичних знань), семіотичний аспект (формалізація виникаючих математичних об'єктів через знакові системи, візуалізації та інші репрезентації), практико-процесуальний аспект (набуті знання, суб'єкт-суб'єктна взаємодія педагога та здобувачів освіти щодо обґрунтування/доведення, моделювання та інших етапів розв'язування задачі).

Навчання застосування методів диференціального числення дійсних функцій кількох змінних для розв'язування певних типів олімпіадних задач потребує принаймні на перших етапах збалансованої підготовчої роботи з оволодіння учнями переважно на стійкому інтуїтивно-наочному рівні системою значно більш абстрактних понять і теоретичних фактів, характерних для навчання вищої математики. Залучаючи аналогії, графічні інтерпретації, попередній досвід здібних учнів, формуються, зокрема, якісні уявлення щодо внутрішніх, граничних, межових точок, обмежених, відкритих і замкнених, компактних множин на числовій прямій, координатній площині $\mathbb{R}^2$, у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$ та евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ для $n \geq 4$. Складніше досягти позитивних результатів з питань ознайомлення з неперервністю та похідними функцій кількох змінних. З практичної точки зору, підкріпленої тривалим досвідом як наставників переможців авторитетних математичних змагань, так і викладачів закладів вищої освіти, достатньо обговорювати ці питання для функцій $z = f(x, y)$ двох змінних: такої бази вистачає для подальшого використання у найбільш характерних для олімпіад випадках функцій трьох змінних, а також у загальній ситуації з $n \geq 2$.

Занурення частини найкращих учнів старшої профільної школи, які поглиблено вивчають математику, в ідеї класичних розділів вищої математичної освіти для розуміння витоків деяких класів олімпіадних задач потребує і переосмислення вчителями предметно-методичних технологій, і більш активної позиції майбутніх учителів математики та їхніх викладачів у педагогічних університетах,

і диверсифікації механізмів синергії систем вищої та післядипломної педагогічної освіти [4].

Сучасне бачення процесів засвоєння математичних знань неможливе без інформаційно-комунікаційних стратегій та їхнього поєднання чи розмежування з традиційними моделями навчання. У центрі цієї проблематики знаходиться математичний аналіз як фундамент сучасної математичної освіти. Ми виходимо з того, що висновки дослідження Ю. Ботузової [1] проєктуються на всі кластери математичної освіти, хоча тематично воно присвячене ІКТ-супроводу для майбутніх учителів математики інших розділів аналізу, пов'язаних із функціями одної дійсної змінної. У роботі [1] описано модельний підхід до кейсів, релевантний і для нашого дослідження: він не лише покращує володіння програмним забезпеченням, а й розвиває пізнавальні потреби та активність здобувачів освіти, їхні експериментально-дослідницькі й евристичні компетентності, системне мислення, сприяє продуктивному засвоєнню матеріалу у розширеному обсязі, формуванню траєкторій самоосвіти тощо.

Таким чином, виникають *точки зростання* у використанні рамкових кейс-методів під час занять як на курсах підвищення кваліфікації вчителів математики, так і зі студентами-математиками. Такі методи апробовані кафедрою методики викладання і змісту освіти КЗВО «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради», у тому числі у співпраці з кафедрою математики та методики її навчання ДЗ «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» [4; 10].

Ефективними математичними та дидактичними інструментами для візуалізації й опанування складних концепцій аналізу функцій кількох змінних зарекомендували себе платформи WolframAlpha, Desmos і насамперед GeoGebra. Вони допомагають долати традиційні проблеми переходу від шкільних об'єктів початків аналізу до питань повноцінного курсу вищої математики. Крім того, ці сервіси комп'ютерної математики, особливо в екосистемах CAS + AI, відкривають широкі можливості для висунення гіпотез, візуалізації та перевірки розв'язань і відповідей на рівні окремих задач олімпіадного характеру [14].

Для нашого дослідження важливими є результати Н. Кугай [6], яка проаналізувала доцільність застосування інтерактивних моделей під час вивчення диференціального числення функцій кількох змінних, розробила приклади таких моделей у середовищі GeoGebra 3D та запропонувала методику їх використання для забезпечення концептуального розуміння здобувачами освіти сутності відповідних математичних об'єктів.

Засобами системи динамічної геометрії GeoGebra, в якій, зокрема, зручно реалізується побудова поверхонь, зображення їхнього перетину, масштабування, обертання 3D-графіки, можна проілюструвати (https://www.geogebra.org/classic/camt3uyk; https://www.geogebra.org/classic/ketcjkzt – *тут і далі у статті наводяться активні посилання на запропоновані автором ілюстративні GeoGebra-аплети*) «природу» розривності в точці $Q(0,0)$ для таких класичних прикладів функцій, неперервних за кожною змінною x, y окремо [5, п. 13.3.2]:

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases} \qquad h(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(див. також [6]).

Сприйняття без спеціальних строгих доведень неперервності на своїй області визначення для функцій кількох змінних, заданих «зрозумілими» для учнів виразами, затруднень, як правило, не викликає [15]. Це ми можемо відзначити й для багатовимірних аналогів теорем Больцано-Коші, Вейєрштрасса, з якими учні класів з поглибленим вивченням математики зустрічаються під час вивчення властивостей неперервних функцій однієї змінної. Можна, наприклад, обмежитись поясненням сутності зв'язків неперервності функції $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ та компактності й зв'язності області її визначення $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$ із відповідними властивостями множини $f(\mathcal{D})$ [3; 5].

Ознайомлення певних категорій підготовлених учнів з базовими ідеями й технікою частинного диференціювання (частинних похідних) помітно розширює математичний кругозір, арсенал прийомів доведення олімпіадних нерівностей. Водночас створюється нестандартне предметно-методичне середовище для вчителя, який зосереджується на поглибленому рівні викладання математики у старшій школі і при цьому прагне запезпечити для своїх учнів передумови для спрямованого випереджального математичного розвитку. В якості методологічних шаблонів для представлення учням первинного понятійно-процедурного апарату аналізу функцій кількох змінних на основі взаємодії ETC + OSA можна пропонувати підходи, розроблені у статті [21] фактично у форматі технологічних карт.

Подача матеріалу, що стосується елементів теорії екстремумів функцій кількох змінних, з нашої точки зору може виглядати доволі традиційно, у тому числі й для оновлення цих знань під час роботи з учителями. Нехай функція n змінних f у внутрішній точці $M_0\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ своєї області визначення має всі частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1\le i\le n$, і ця точка M_0 є точкою локального (безумовного) екстремуму (на подальше зауважимо, що в задачах, які нас цікавитимуть, виконуються всі вимоги до функцій для застосування потрібних теорем аналізу). Тоді – аналогічно з теоремою Ферма для функцій одної змінної – з *необхідністю*

виконуються рівності: $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i}=0$, $1\le i\le n(1)$. Це неважко довести безпосередньо, фіксуючи значення всіх змінних, крім одної, і розглядаючи точки локального екстремуму утворених функцій однієї змінної. Геометричний зміст цієї необхідної умови ($\overline{\mathbf{grad}} f(M_0)=\bar{0}$) є цілком очевидним (точка M_0, в якій всі частинні похідні дорівнюють нулю, називається *стаціонарною*). Добре відомо, що, як і для локальних екстремумів диференційовних функцій одної змінної, умова (1) не є достатньою: стаціонарні точки не обов'язково є точками локального екстремуму. Звісно, велика кількість таких прикладів наводиться у підручниках для студентів. Але ж повноцінне дослідження стаціонарних точок у переважній більшості ситуацій виходить далеко за межі теоретичних і практичних компетентностей навіть мотивованих учнів. Підкреслимо, утім, що в олімпіадних задачах, як правило, нам знадобиться лише знаходити всі стаціонарні точки (точки, *підозрілі* на екстремуми) для подальшого безпосереднього перебору.

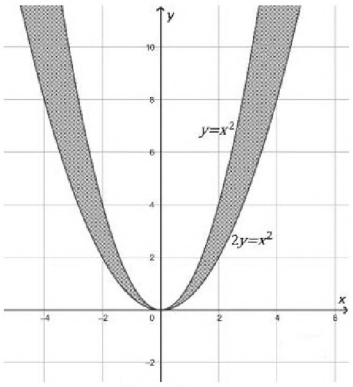


Рис. 1.

GeoGebra-візуалізація https://www.geogebra.org/classic/uvhphsvw для функції $f(x,y)=x^3-2y^3-3x+6y$, яка має чотири стаціонарні точки $(-1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, показує, що з них точками локального екстремуму будуть лише дві останні.

Звернемо увагу на поведінку функції $f(x,y)=(y-x^2)(2y-x^2)$. Із системи рівнянь

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^3-6yx=0,\\ 4y-3x^2=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(4x^2-6y)=0,\\ 4y-3x^2=0\end{cases}$$

знаходимо її єдину стаціонарну точку $O(0,0)$, причому $f(0,0)=0$. Зобразивши графік рівняння $f(x,y)=0$, ми побачимо (рис. 1), що в кожному околі точки $O(0,0)$ функція f набуває як додатних, так і від'ємних значень, і тому ця точка не буде точкою екстремуму. Зауважимо, що оскільки *гессіан* функції f у точці $O(0,0)$ є нульовим, то така стаціонарна точка є *виродженою*. Цікаво, що звуження $g=f|_\ell$ функції f на будь-яку пряму ℓ, що у площині Oxy проходить через точку $O(0,0)$, матиме в нулі локальний мінімум: https://www.geogebra.org/classic/agevdzvm. Насправді, для прямих $x=0$, $y=0$ це очевидно; для прямої $\ell: y=px$, $p\neq 0$, $g(x)=x^4-3px^3+2p^2x^2$, $g'(0)=0$, $g''(0)=4p^2>0$ (https://www.geogebra.org/classic/ghukgwzp).

Задачі на доведення нерівностей часто зводяться до знаходження найбільших (найменших) значень функції кількох змінних (*цільових функцій*), для яких виконуються додаткові умови у вигляді нерівностей чи рівностей (*рівнянь зв'язку*). Точки умовного абсолютного екстремуму на множині γ, заданій рівнянням зв'язку $\varphi=0$ (для методичного спрощення сприйняття ідеї та її геометричної інтерпретації варто розглядати одне рівняння зв'язку та функцію двох змінних), – якщо вони існують, – обов'язково знаходяться серед точок умовного локального екстремуму функції f.

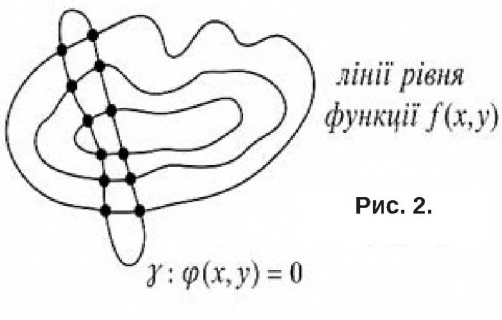


Рис. 2.

Відмічені на рис. 2 *трансверсальні* точки на лініях рівня $f(x,y)=c$ (лінії рівня ще називають *ізолініями*) нас не цікавлять, оскільки, рухаючись кривою γ, ми зможемо переходити на лінії рівня з більшим чи меншим значенням константи c.

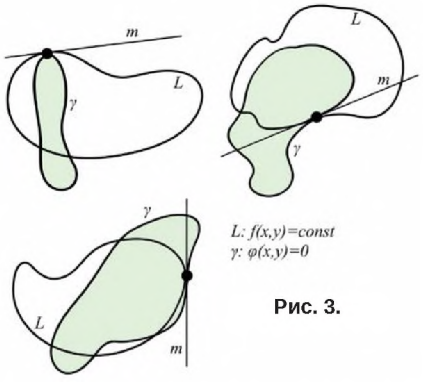


Рис. 3.

Натомість точки умовного локального екстремуму знаходяться *серед* точок, що відповідають дотиканню (наявності спільної дотичної m) ізолінії L і кривої γ (деякі ситуації такого типу схематично зображено на рис. 3).

Зручно вважати, що γ не проходить через стаціонарні точки функції f. До того ж $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\varphi \neq \vec{0}$ (γ утворюється *неособливими* точками).

Наявність спільної дотичної зручно розуміти як колінеарність векторів-нормалей до лінії рівня та до кривої γ – колінеарність градієнтів $\overrightarrow{\mathbf{grad}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ та $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$. Познайомити учнів, які готуються до олімпіад вищого рівня, із геометричним тлумаченням вектора-градієнта в якості напрямного вектора нормалі можна на стандартних прикладах кола, сфери, прямої, площини тощо. Дієвим також виявляється й таке міркування, яке розкриває зміст питання практично на рівні шкільної програми з початків аналізу. Розглянемо рівняння дотичної $y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$ до графіка функції g одної змінної в точці $M_0(x_0, g(x_0))$. Вектор $\vec{n}(g'(x_0), -1)$ є вектором-нормаллю дотичної. Графік $y = g(x)$ можна формально вважати лінією рівня $h(x,y) = 0$ функції двох змінних $h(x,y) = g(x) - y$, а вектор-градієнт $\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)$ набуде вигляду саме $(g'(x), -1)$. На прикладах неважко продемонструвати той відомий факт, що в деякому околі неособливої точки рівняння $\varphi(x,y) = 0$ задає деяку гладку криву, що має явне функціональне представлення вигляду $y = y(x)$ чи вигляду $x = x(y)$.

Вітчизняний і зарубіжний методичний досвід переконує в тому, що поступовий ретельний розбір цих загальновідомих ідей насправді добре готує до усвідомлення без складних строгих доведень на потрібному для застосування під час розв'язування задач рівні *необхідної* умови умовного локального екстремуму функції декількох змінних – правила Лагранжа, котре полягає в забезпеченні колінеарності векторів-градієнтів $\overrightarrow{\mathbf{grad}}f$ та $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\varphi$, тобто у відшуканні точок на γ, для яких існуватиме $\lambda \neq 0$ таке, що $\overrightarrow{\mathbf{grad}}f + \lambda\overrightarrow{\mathbf{grad}}\varphi = \vec{0}$ [19]. Функція $\Phi(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ – функція Лагранжа з одним рівнянням зв'язку $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Це рівняння зв'язку можна записати у вигляді $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0$, і знаходження всіх точок $(x_1, \ldots, x_n) \in \gamma$, в яких **може бути** умовний локальний екстремум функції f (разом із знаходженням відповідних множників Лагранжа, для котрих має місце рівність $\overrightarrow{\mathbf{grad}}f + \lambda\overrightarrow{\mathbf{grad}}\varphi = \vec{0}$), розв'язуванням системи рівнянь $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0$ зводиться до знаходження стаціонарних точок функції $n+1$ змінної $\Phi(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ – так званих *умовно-стаціонарних точок*. Наголосимо на тому, що дослідження питання щодо того, чи буде умовно-стаціонарна точка насправді точкою умовного локального екстремуму, є надто складним і для розв'язування задач учнівських олімпіад неактуальним.

Дидактично результативним завжди є докладне опрацювання з учнями, студентами, учителями ідей у стилі класичної книжки [22], в якій наводиться широкий спектр екстремальних задач олімпіадного, прикладного, геометричного характеру, розбираються фізичні й геометричні витоки ідей Лагранжа, окреслюються шляхи інтуїтивного коректного формування в учнів базових понять аналізу функції кількох змінних та фактично моделюється перехід від алгоритмів пошуку точок умовного екстремуму до доступних учням початків варіаційного числення.

У статті [15] містяться важливі приклади задач математичних олімпіад, які зручно розв'язувати методом Лагранжа. Можна звернути увагу учнів, студентів, учителів на статтю [20]. Ми розберемо тут інший приклад застосування методу множників Лагранжа, завдяки якому задача математичного змагання найвищого рівня – *International Mathematical Olympiad*, – для якої передбачалось складне авторське олімпіадне розв'язання [24], перетворюється на задачу технічного характеру, але таку, що вимагає розвиненого просторового мислення та сформованих аналітико-геометричних компетентностей. Підкреслимо, що задачу хоча й можна розв'язати суто формальним застосуванням методу Лагранжа, уникаючи геометричних деталей, але системна робота з обдарованими учнями, підготовка майбутніх учителів математики, підвищення кваліфікації вчителів-практиків не можуть обминати такі важливі компоненти навчання математики та методики її викладання.

Задача (*XLVII Міжнародна математична олімпіада*, 2006 р.). Знайдіть найменше число M таке, що нерівність $\left|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)\right| \le M(a^2 + b^2 + c^2)^2$ виконується для будь-яких дійсних чисел a, b і c.

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді $|(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)| \le M(a^2 + b^2 + c^2)^2$. Оскільки ця нерівність є симетричною та однорідною, то можна вважати, що $a \ge b \ge c$ і $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Виконаємо підстановки: $x = a - b$, $y = b - c$, $x \ge 0$, $y \ge 0$; $z = a + b + c$. Рівності $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ та $x^2 + y^2 + z^2 + (x+y)^2 = 3$ є рівносильними. Друга рівність у системі координат $Oxyz$ визначає *еліпсоїд обертання* (*сфероїд*) із центром у початку координат, симетричний відносно площин $z = 0$, $x = y$, $x = -y$. Його зображення легко отримати в програмі GeoGebra. За стандартним алгоритмом перетворення координат $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, $z = w$, приводимо квадратичну форму $q(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy$ та рівняння еліпсоїда $q(x,y,z) = 3$ до канонічного вигляду (головних осей) у системі координат $Ouvw$: $u^2 + \frac{v^2}{3} + \frac{w^2}{3} = 1$ (півосі дорівнюють 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$). Цей еліпсоїд утворюється обертанням еліпса $u^2 + \frac{w^2}{3} = 1$ площини Ouw (тобто площини $v = 0$) навколо координатної осі u у просторі $Ouvw$. У системі координат $Oxyz$ це відповідає обертанню навколо прямої $\{x = y, z = 0\}$ з напрямним вектором $\vec{m}(1,1,0)$.

Маємо знайти найбільше значення виразу $xy(x+y)|z|$ на множині $\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 + (x+y)^2 = 3, x \ge 0, y \ge 0\right\}$. Для зображення цієї частини еліпсоїда в GeoGebra можна використати такі скрипти (команди):

f (x , y) = I f (3 - 2 x ^ 2 - 2 y ^ 2 - 2 x y > = 0 , s qrt(3-2x^2-2y^2-2xy)),

g (x , y) = I f (3 - 2 x ^ 2 - 2 y ^ 2 - 2 x y > = 0 , - sqrt(3-2x^2-2y^2-2xy)),

Surface(u,v,f(u,v),u,0,sqrt(3),v,0,sqrt(3)),

Surface(u,v,g(u,v),u,0,sqrt(3),v,0,sqrt(3)).

Отже, зрозуміло, слід знайти найбільше значення цільової функції $f(x,y,z)=xyz(x+y)$ на компактній множині $Q=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2+(x+y)^2=3, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$. Цей максимум досягається на множині $\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2+(x+y)^2=3, x>0, y>0, z>0\}$.

Знайдемо стаціонарні точки функції Лагранжа $\Phi(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+z^2+(x+y)^2-3)$ в області $U=\{(x,y,z,\lambda): x>0, y>0, z>0\}$, розв'язавши систему

$$\begin{cases}(2x+y)(yz+2\lambda)=0,\\ (2y+x)(xz+2\lambda)=0,\\ xy(x+y)+2\lambda z=0,\\ x^2+y^2+z^2+(x+y)^2=3.\end{cases}$$

Ураховуючи, що числа x, y, z додатні, маємо: $yz+2\lambda=xz+2\lambda=0$, $x=y$. Звідси $z=\sqrt{2}x$, $x=y=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $z=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda=-\frac{3}{8\sqrt{3}}$. Шукана стаціонарна точка є єдиною в області $U\subset\mathbb{R}^4$, і тому $\max\limits_{Q} f=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Відповідь: $\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Задача. Доведіть, що $2x+y-x^2y\le 2$ для всіх пар дійсних чисел x та y таких, що $2x^2+y^2\le 2$.

Розв'язання. Ми маємо обмежену еліпсом компактну множину $\copyright=\{(x,y): 2x^2+y^2\le 2\}$, яку можна задати параметрично: $x=r\cos t$, $y=\sqrt{2}r\sin t$, $0\le r\le 1$, $0\le t\le 2\pi$. Для візуалізації в GeoGebra можна використати скрипт:

Surface(r*cos(t), sqrt(2)r*sin(t), 2r*cos(t)+sqrt(2) r*sin(t)–r^2*cos(t)^2sqrt(2)r*sin(t), r, 0, 1, t, 0, 2*Pi)

(https://www.geogebra.org/classic/gagckuup).

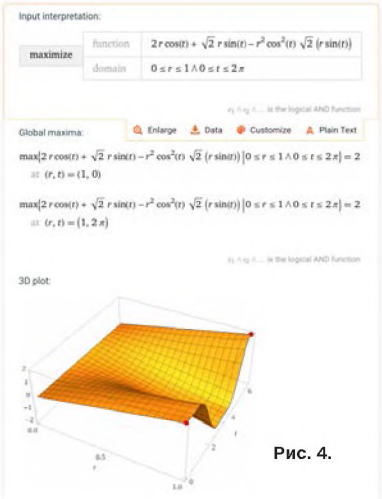


Рис. 4.

Для WolframAlpha (рис. 4) – команду maximize 2r*cos(t)+sqrt(2)r* sin(t)–r^2*cos(t)^2*sqrt(2)r* sin(t), 0<=r<=1, 0<=t<=2*Pi.

Цільова функція $f(x,y)=2x+y-x^2y$ на компакті $\copyright$ має найбільше значення. Доведемо, що $\max\limits_{(x,y)\in\copyright} f(x,y)=2$.

У внутрішності int$\copyright$ множини $\copyright$ найбільше значення цієї функції досягатись не може, бо розв'язки системи рівнянь $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=0\Leftrightarrow x^2=xy=1$ не задовольняють нерівність $2x^2+y^2<2$ (тобто всередині еліпса немає навіть стаціонарних точок). Знайдемо найбільше значення виразу $2x+y-x^2y$ за умови $2x^2+y^2=2$. У даному випадку можна обмежитись стандартним дослідженням функції одної змінної. Достатньо брати $x\in[0;1]$, і тоді $x^2=\frac{2-y^2}{2}$, $-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$, $x=\sqrt{\frac{2-y^2}{2}}$. Розглянемо функцію $h(y)=\sqrt{4-2y^2}+y-y\cdot\frac{2-y^2}{2}$, тобто $h(y)=\sqrt{4-2y^2}+\frac{1}{2}y^3$, $y\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Тоді $h'(y)=-\frac{2y}{\sqrt{4-2y^2}}+\frac{3}{2}y^2$, $y\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, і на інтервалі $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ рівняння $h'(y)=0$ має три розв'язки: $y=0$, $y=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Отже, $\max\limits_{y\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} h(y)=h(0)=2$, позаяк $h\left(-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}<2$, $h\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}<2$, $h\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}<2$, $h\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{10}{3\sqrt{3}}<2$.

До розібраної задачі зменшенням кількості змінних за допомогою pqr-методу (його також називають uvw-методом чи abc-методом [18; 23]) строго обґрунтованими міркуваннями зводиться така задача.

Задача (*Фінальний етап IV Соросівської олімпіади*, 1997 р.). Доведіть, що для дійсних чисел x, y, z таких, що $x^2+y^2+z^2\le 2$, виконується нерівність $x+y+z\le 2+xyz$.

Розв'язання. Нехай $\lambda^2=x^2+y^2+z^2$, $0\le\lambda\le\sqrt{2}$; $p=x+y+z$, $q=xy+yz+zx$, $r=xyz$. Тоді $p^2-2q=\lambda^2$.

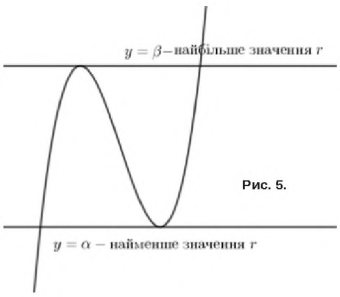


Рис. 5.

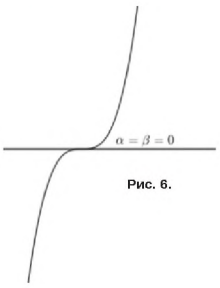


Рис. 6.

Будемо вважати p фіксованим, і в даній ситуації величину q додатково фіксувати вже непотрібно. Нам (це – випадок варіації r) слід довести, що $f(r)\le 0$, де $f(r)=p-r-2$ – лінійна відносно r функція. Зазначимо, що за теоремою Вієта числа x, y, z є розв'язками кубічного рівняння $t^3-pt^2+qt-r=0$, тобто $r=F(t)$, де $F(t)=t^3-pt^2+qt$, $F(0)=0$. Рівняння $F(t)=r$ повинно мати три дійсні корені з урахуванням їхньої кратності: $\alpha\le r\le\beta$ (на рис. 5 та рис. 6 це схематично зображено для графіка функції $F(t)$). То ж нерівність $f(r)=p-r-2\le 0$ треба забезпечити на відрізку $[\alpha;\beta]$ (відрізок варіації r), який може бути «виродженим» у точку ($\alpha=\beta=0$). Оскільки функція f спадна, то достатньо розглядати лише $r=\alpha$. Кінці відрізка варіації r характеризуються тим, що принаймні два числа з-поміж x, y, z є рівними між собою. Без обмеження загальності будемо вважати, що $z=x$, і маємо попередню задачу.

Реалізація pqr-методу в конкретних задачних ситуаціях нашої статті позбавляє його від зайвого

в даному випадку теоретичного «нашарування». Звернемо увагу й на те, що *pqr*-метод фактично є окремим випадком надзвичайно потужного загального підходу Equal Variable Method до доведення нерівностей зменшенням кількості змінних, розробленого румунським математиком Vasile Cîrtoaje [17] (див. також [2]).

Розглянемо, як для цієї задачі можна застосувати алгоритм методу умовних множників Лагранжа, який тут потребує алгебраїчної винахідливості.

Знайдемо найбільше значення цільової функції $f(x,y,z)=x+y+z-xyz$ за умови $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2\le 0$. Система рівнянь $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0$ має лише два розв'язки $x=y=z=1$, $x=y=z=-1$, і тому в області $x^2+y^2+z^2<2$ функція f не має точок локального екстремуму. Функцію f розглядатимемо на компакті – сфері $x^2+y^2+z^2=2$. Утворимо функцію Лагранжа $\Phi(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$, стаціонарні точки якої з *необхідністю* визначають усі шукані точки умовного екстремуму функції f. Складемо систему рівнянь $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=0$ і позначимо $t=-2\lambda$:

$$\begin{cases} yz+tx=1,\\ zx+ty=1,\\ xy+tz=1,\\ x^2+y^2+z^2=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z-t)(y-x)=0,\\ (x-t)(z-y)=0,\\ yz+tx=1,\\ x^2+y^2+z^2=2. \end{cases}$$

Залишається розв'язати чотири системи рівнянь (звернемо увагу, що принаймні два з трьох чисел x, y, z мають бути рівними між собою):

$$x=z=t,\quad y=z=t,\quad x=y=t,\quad x=y=z,$$
$$\{yx+x^2=1,\ \{yx+y^2=1,\ \{zx+x^2=1,\ \{ty+y^2=1,$$
$$2x^2+y^2=2;\ 2y^2+x^2=2;\ 2x^2+z^2=2;\ 3y^2=2.$$

Маємо такі 14 розв'язків – стаціонарних точок (x,y,z,λ) функції Лагранжа:

$$\left(1,0,1,-\frac12\right),\ \left(-1,0,-1,\frac12\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{2\sqrt3}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{2}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{2\sqrt3}\right);$$
$$\left(0,1,1,-\frac12\right),\ \left(0,-1,-1,\frac12\right),\ \left(\frac{2}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{2\sqrt3}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{2\sqrt3}\right);$$
$$\left(1,1,0,-\frac12\right),\ \left(-1,-1,0,\frac12\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3},-\frac{1}{2\sqrt3}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{2}{\sqrt3},\frac{1}{2\sqrt3}\right);$$
$$\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt3},\frac{\sqrt2}{\sqrt3},\frac{\sqrt2}{\sqrt3},-\frac{1}{2\sqrt6}\right),\ \left(-\frac{\sqrt2}{\sqrt3},-\frac{\sqrt2}{\sqrt3},-\frac{\sqrt2}{\sqrt3},\frac{1}{2\sqrt6}\right).$$

Тепер ми знайдемо $\max\limits_{x^2+y^2+z^2\le 2} f(x,y,z)=\max\limits_{x^2+y^2+z^2=2} f(x,y,z)=2$.

Для методичного порівняння наведемо запропоноване учасникам олімпіади розв'язання цієї задачі, яке не передбачає використання техніки математичного аналізу [7].

Спочатку розглянемо невід'ємні x,y,z. Позначимо $A=2+xyz-(x+y+z)$, $B=x^2+y^2+z^2-2$. Якщо $(x-1)(y-1)(z-1)\ge 0$, то $2A+B=(x+y+z-2)^2+2(x-1)(y-1)(z-1)\ge 0$, і позаяк $B\le 0$, маємо, що $A\ge 0$. Нехай $(x-1)(y-1)(z-1)<0$. Якщо серед чисел $x-1$, $y-1$, $z-1$ є рівно одне від'ємне, то $x^2+y^2+z^2>2$, і тому вважаємо, що $0\le x,y,z<1$. Але тоді $A=2+xyz-(x+y+z)=(1-x)(1-y)+(1-xy)(1-z)\ge 0$.

Тепер припустимо, що серед чисел x,y,z є хоча б одне від'ємне – наприклад, $z<0$. Очевидно, що $x+y\le 1+\frac{x^2+y^2}{2}<2$, $xy\le\frac{x^2+y^2}{2}<1$. Тому $z(xy-1)>0$, тобто $xyz>z$, звідки й випливає, що $x+y+z<xyz+2$.

Аналогічною є наступна задача.

Задача (*IV етап Всеукраїнської олімпіади*, 2004 р.). Доведіть, що для дійсних чисел a, b, c таких, що $a^2+b^2+c^2=1$, виконується нерівність $a+b+c\le\sqrt2+2abc$.

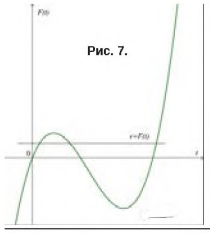
Розв'язання. Застосування методу Лагранжа тут розглядати вже не будемо (це можна рекомендувати здобувачам освіти як вправу). Наведемо авторське (В. А. Ясінський) розв'язання, що передбачає нетривіальну класифікацію випадків [8]. Ураховуючи симетричність, припускаємо спочатку, що $0<a\le b\le c$. Якщо $c\le\frac{\sqrt2}{2}$, то $2abc-a-b-c+\sqrt2-\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}-a\right)\left(\frac{\sqrt2}{2}-b\right)+\left(\frac{\sqrt2}{2}-c\right)(1-2ab)\ge 0$. Для $c>\frac{\sqrt2}{2}$ маємо: $(a+b)+c\le\sqrt{2\left((a+b)^2+c^2\right)}=\sqrt{2(1+2ab)}\le\sqrt2ab+\sqrt2\le 2abc+\sqrt2$. Нехай принаймні одне з чисел a, b, c є недодатним, і вважатимемо, що $c\le 0$. Оскільки $a+b\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\le\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\sqrt2$, $2ab\le a^2+b^2\le 1$, то $2abc-a-b-c+\sqrt2=\left(\sqrt2-a-b\right)-c(1-2ab)\ge 0.$

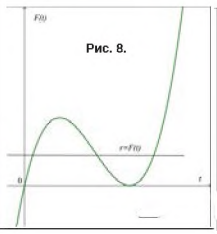
Тепер покажемо, що для даної задачі, як і для попередньої, можна успішно застосувати *pqr*-метод з варіацією $r=abc$, фіксованим $p=a+b+c$ і $q=ab+bc+ca$, $p^2-2q=1$. Позначимо $f(r)=p-2r-\sqrt2$. Потрібно довести, що на відрізку варіації $\alpha\le r\le\beta$ (ми бачили, що цей відрізок може бути виродженим у точку з $\alpha=\beta=0$) виконується нерівність $f(r)\le 0$. Функція f є лінійною спадною відносно r, і тому достатньо розглядати лівий кінець відрізка варіації, який характеризується рівністю між собою принаймні двох із наших трьох чисел. Нехай $a=b$. Доведемо, що за умови $2a^2+c^2=1$ справджується нерівність $2a+c-2a^2c\le\sqrt2$. Це легко зводиться до дослідження функцій $y_{1,2}(x)=x^3\pm\sqrt{2-2x^2}$, $x\in[-1;1]$. На інтервалі $(-1;1)$ $\left(x^3\pm\sqrt{2-2x^2}\right)'=3x^2\mp\frac{\sqrt2x}{\sqrt{1-x^2}}$. Далі, коренями рівняння $3x^2-\frac{\sqrt2x}{\sqrt{1-x^2}}=0$ є $x=0$, $x=\sqrt{\frac23}$, $x=-\frac{1}{\sqrt3}$, а коренями рівняння $3x^2+\frac{\sqrt2x}{\sqrt{1-x^2}}=0$ – числа $x=0$, $x=-\sqrt{\frac23}$, $x=-\frac{1}{\sqrt3}$. Отже, $\max\limits_{1\le x\le 1}\left(x^3+\sqrt{2-2x^2}\right)=y_1(0)=\sqrt2$, $\max\limits_{1\le x\le 1}\left(x^3-\sqrt{2-2x^2}\right)=y_2(1)=1$.

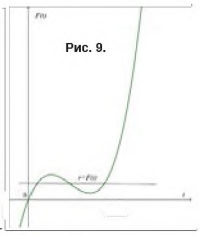
Для невід'ємних a, b, c варіація $r=abc$ потребує деякої модифікації. Пропонуємо демонструвати це на такому прикладі.

Задача (*D. Grinberg's Inequality*). Доведіть, що для будь-яких невід'ємних чисел a, b, c має місце нерівність $a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$.

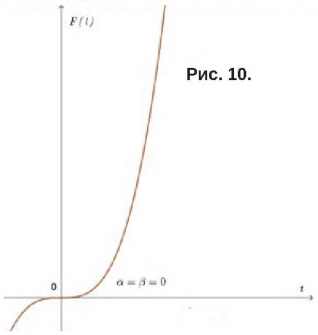
Розв'язання. Нерівність допускає «олімпіадне» доведення. Принаймні два числа серед чисел $1-a$, $1-b$, $1-c$ мають однаковий знак (у «нестрогому» сенсі). Припустимо, що це числа $1-b$ і $1-c$, тобто $(1-b)(1-c)\ge 0$. Залишається зауважити, що $a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca)=(a-1)^2+(b-c)^2+2a(1-b)(1-c)\ge 0$, що й потрібно було довести.

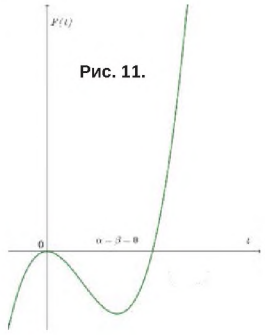

Рис. 7.


Рис. 8.


Рис. 9.

Розберемо інший шлях розв'язування. Зафіксуємо $p=a+b+c$ і $q=ab+bc+ca$. Наша нерівність набуває вигляду $f(r)\geq 0$, де $f(r)=p^2-4q+2r+1$ – лінійна зростаюча функція. Зазначимо, що за теоремою Вієта числа a, b, c є розв'язками кубічного рівняння $t^3-pt^2+qt-r=0$, тобто $r=F(t)$, де $F(t)=t^3-pt^2+qt$, $F(0)=0$. Рівняння $F(t)=r$, $r\geq 0$, повинно мати три невід'ємні корені з урахуванням їхньої кратності. Кінці відрізка варіації $\alpha\leq r\leq\beta$ (як і вище, цей відрізок може бути виродженим у точку з $\alpha=\beta=0$) характеризуються тим, що для мінімального значення r у відповідній трійці a, b, c одне з чисел дорівнює нулю або є хоча б два рівні числа (при цьому можуть реалізовуватись обидві ці ситуації одночасно), а для максимального значення r серед чисел a, b, c є хоча б два рівні числа. Проілюструємо це на рис. 7–11.


Рис. 10.


Рис. 11.

Оскільки f зростає, то достатньо розглянути лівий кінець відрізка варіації r: якщо $c=0$, то $a^2+b^2+1>2ab$; якщо $a=b\geq 0$ і $c\geq 0$, то $2a^2+c^2+2a^2c+1\geq 2\left(a^2+2ac\right) \Leftrightarrow c^2+2a^2c+1\geq 4ac$, бо $c^2+a^2c+a^2c+1\geq 4\sqrt[4]{c^2\cdot a^2c\cdot a^2c\cdot 1}=4ac$.

Висновки та перспективи подальших розвідок. У статті здійснено аналіз дидактичної придатності *робочих продуктів*, створених у парадигмі agile-методології, для навчання доведення нерівностей на матеріалі учнівських математичних олімпіад. Досліджено можливості використання функцій кількох змінних (зокрема диференціального числення) на компетентнісному рівні вищої математичної освіти. Показано, що створення дидактико-методичних комплексів у формі компактних систем задач може забезпечити перехід від складної задачі шкільної математики до розширеної підготовки обдарованого учня – оволодіння новими поняттями, теоремами та ефективними методами вищої математики з чітко визначеним і закріпленим освітнім результатом. Дієвим методичним інструментом вважаємо розбір і порівняння різних у математичному плані прийомів розв'язування розглядуваних задач, що підсилює для учня мотиваційний складник переходу на новий знаннєвий рівень. Для обговорення теоретичного матеріалу, що виходить за межі шкільної програми, демонстрації певних етапів розв'язування задач учитель має шукати шляхи гармонізації строгих формально-логічних міркувань із інтуїтивно-наочними міркуваннями та комп'ютерними візуалізаціями. Усе це дозволяє розглядати олімпіадну підготовку не лише як окремий напрям пошуково-евристичного вчення–навчання, а й як один із ключових чинників цілісної математичної освіти професійного спрямування, об'єднаної стратегією *генералізації* знань. Поєднання Extended Theory of Connections та Onto-Semiotic Approach сприяє кращому розумінню як педагогами, так і учнями механізмів виникнення й функціонування математичних зв'язків у процесі вивчення нових понять, теоретичних концепцій, аналогій тощо, розв'язування олімпіадних задач, що відкриває додаткові можливості для дидактичного моделювання.

Отримані результати варто використовувати для проведення факультативних, гурткових, індивідуальних занять з математично обдарованими школярами, для реалізації проєктних методів учнівської пошуково-дослідної роботи. Матеріали статті стануть у пригоді для підвищення якості професійної підготовки студентів-математиків педагогічних університетів, а також можуть бути основою для створення математичних і дидактичних кейсів для різних форматів підвищення кваліфікації вчителів із акцентом на синтез елементів вищої математики із практикою поглибленого вивчення математики у профільній старшій школі.

Перспективи розвідок вбачаємо в постійному оновленні змісту науково-методичного супроводу роботи з учнями, які мають високий пізнавальний потенціал, створенні та впровадженні відповідних тематичних ATLM- і XP-продуктів, методологічно обґрунтованому ознайомленні здібних учнів із розділами професійної математичної освіти, сучасними математичними ідеями тощо. Слід також звертати якомога більше уваги на методику цифрових візуалізацій і симуляцій, потенціал та особливості використання комп'ютерної математики й систем штучного інтелекту у сфері підготовки до інтелектуальних змагань.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Ботузова Ю. В. Досвід використання засобів ІКТ у навчанні математичного аналізу майбутніх учителів математики. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2020. Т. 75, № 1. С. 153–169. DOI: https://doi.org/10.33407/itlt.v75i1.2530.

2. Гаєвський М. В., Ізюмченко Л. В., Ключник І. Г. Застосування методів математичного аналізу для

доведення олімпіадних нерівностей. *Наукові записки Центральноукраїнського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка. Сер. Педагогічні науки*. 2020. Вип. 191. С. 58–61. DOI: https://doi.org/10.36550/2415-7988-2020-1-191-58-61.

3. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Част. 2 : підручн. Київ : Либідь, 1994. 304 с.

4. Задоріна, О. М., Мітельман, І. М., Папач О. І. Питання підготовки майбутніх учителів математики до інтеграції в систему післядипломної педагогічної освіти. *Нова педагогічна думка*. 2022. Т. 111, № 3. С. 81–90. DOI: https://doi.org/10.37026/2520-6427-2022-111-3-81-90.

5. Илин В. А., Садовничи В. А., Сендов Бл. Х. Математически анализ. Част. първа. София : Наука и изкуство, 1984. 482 с.

6. Кугай Н. В. Методика використання інтерактивних моделей GeoGebra 3D як засобу забезпечення концептуального розуміння диференціального числення функцій кількох змінних. *Вісник Глухівського національного педагогічного університету ім. О. Довженка*. 2026. Т. 1, № 60. С. 53–61. DOI: https://doi.org/10.31376/2410-0897-2026-1-60-53-61.

7. Математичні олімпіади школярів України (1991–2000) / Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. : навч.-метод. посіб. Київ : Техніка, 2003. 511 с.

8. Математичні олімпіади школярів України (2001–2006) / Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. : навч.-метод. посіб. Львів : Каменяр, 2008. 348 с.

9. Мітельман І. М. Синхронізація спеціалізованих компетентностей під час підготовки учнів до математичних олімпіад як науково-методична проблема. *Педагогічна наука і освіта у сучасному вимірі: проблеми і перспективи розвитку* : матеріали III Всеукр. наук.-практ. конф., 14 трав. 2021 р. Одеса : видавець Букаєв Вадим Вікторович, 2021. С. 198–204.

10. Мітельман І. М. Особливості моделювання спеціалізованих методичних кейсів у контексті підвищення кваліфікації вчителів математики. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету ім. П. Тичини*. 2021. № 2. С. 137–149. DOI: https://doi.org/10.31499/2307-4906.2.2021.236672.

11. Мітельман І. М. Формування навичок знаходження найбільших значень функцій трьох змінних під час розв'язування деяких олімпіадних задач. *Актуальні питання природничо-математичної освіти. Збірник наукових праць Сумського державного педагогічного університету.* 2022. Вип. 2(20). С. 64–74. DOI: 10.5281/zenodo.7426573.

12. Мітельман І. М. Дидактичні ресурси agile-стратегій підготовки вчителів до роботи з математично обдарованими учнями. *Наша школа: науково-практичні студії*. 2023. № 1. С. 65–73. DOI: https://doi.org/10.61339/2786-6947.2023.1.286305.

13. Мітельман І. М. Тригонометричні контури синхронізації функціональних компетентностей на основі задач математичних олімпіад. *Академічні візії*. 2025. Вип. 45. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.16883783.

14. Мітельман І., Папач О. CAS та AI як дидактико-методичний ресурс фахової підготовки та професійного розвитку вчителів математики. *Штучний інтелект у науці та освіті (AISE 2026)* : матеріали III Міжнар. наук. конф., 7 квіт. 2026 р. Київ : ІЦО НАПН України, 2026. С. 195–198. DOI: https://doi.org/10.33407/lib.naes.id/749371.

15. Радченко В. М. Функції багатьох змінних у доведенні нерівностей. *У світі математики*. 2002. № 4. С. 37–44.

16. Ярхо Т., Ємельянова Т., Легейда Д. Упровадження принципу генералізації знань у повторювальний курс елементарної математики в технічних закладах вищої освіти. *Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Сер. Педагогічні науки*. 2019. Вип. 3. С. 440–450. DOI: https://doi.org/10.31494/2412-9208-2019-1-3.

17. Cîrtoaje V. The Equal Variable Method. *Journal of Inequalities in Pure & Applied Mathematics*. 2007. Vol. 8, № 1. Paper No 15. URL: http://eudml.org/doc/116884 (Last accessed: 17.08.2026).

18. Knudsen M. B. T. *The UVW Method*. URL: http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h278791 (Last accessed: 17.08.2026).

19. Lagrange Multipliers. URL: https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/4-8-lagrange-multipliers (Last accessed: 17.08.2026).

20. Maher Ali Rusho Using Lagrange's Multiplier Method to Solve Mathematical Contest Problem. 2022. *International Journal of Sciences*. Vol. 10. Paper No 2622. P. 8–9. DOI: https://doi.org/10.18483/ijSci.2622. URL: https://www.ijsciences.com/pub/article/2622 (Last accessed: 17.08.2026).

21. Rodríguez-Nieto C. A., Font Moll V. Mathematical Connections Promoted in Multivariable Calculus Classes and in Problem-Solving about Vectors, Partial and Directional Derivatives, and Applications. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. 2025. Vol. 21, № 4. Article No 2619. DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/16187.

22. Tikhomirov V. M. Stories about Maxima and Minima. American Mathematical Society, 1990.

23. Tran Phuong Diamonds in mathematical inequalities. Ha Noi : Hanoi Publishing House, 2007.

24. 47th International Mathematical Olympiad. Shortlisted Problems with Solutions. URL: https://www.imo-official.org/problems/2006/ (Last accessed: 17.08.2026).

Дата першого надходження статті до видання: 24.08.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 18.09.2026
Дата публікації (оприлюднення) статті: 29.09.2026