Мітельман Ігор Михайлович
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри методики викладання і змісту освіти
КЗВО «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради»
м. Одеса, Україна
https://orcid.org/0000-0002-9817-6690
https://scholar.google.com/citations?user=eLBb0BwAAAAJ&hl=uk

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РЕСУРСИ РОЗВИТКУ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ І РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

Ключові слова: фундаменталізація та професіоналізація змісту освіти, профілізація старшої школи, методика навчання тригонометрії, застосування властивостей функцій, олімпіадні задачі.

Потреби держави з підготовки науково-технічних кадрів у сферах високих технологій і стратегії реалізації Державного стандарту профільної середньої освіти, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 25 липня 2024 року № 851, передбачають активізацію продуктивного впровадження академічної профілізації на основі поглибленого навчання / вивчення математики в 10–11(12) класах старшої школи. Перехід старшої школи на профільну платформу ґрунтується на фундаменталізації освітнього процесу як універсальній дидактичній категорії – формувальному чиннику змісту освіти, її дидактико-методичного ресурсу [1; 2; 5]. У статтях [4; 10] зазначається, що викладання математики на профільному поглибленому рівні, навчання математично обдарованих учнів, учасників інтелектуальних змагань обумовлює фундаменталізацію освіти в нерозривному зв'язку з обсягом і змістом наукових предметних знань у контексті її професіоналізації. Українські й зарубіжні дослідники поєднують фундаменталізацію та професіоналізацію освіти в межах єдиного процесу генералізації знань – концентрації навчального матеріалу й дидактико-методичного ресурсу навколо ключових теоретичних розділів і системи навчання розв'язування задач [13]. Саме з цієї точки зору наукові розвідки й практики кафедри методики викладання і змісту освіти КЗВО «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради» актуалізують і координують методично значущі ідеї, що позитивно впливають на забезпечення належного рівня післядипломної підготовки вчителів математики і, як наслідок, на розвиток спеціалізованих математичних компетентностей в умовах профілізації старшої школи. Вважаємо, що це досягається постійною роботою зі створення та апробації нових і розширення існуючих дидактичних комплексів-структур «теорія-задачі», проєктів, кейсів, кластерів як робочих продуктів у загальній методології agile [7; 9]. При цьому на рівень синхронізації зон найближчого математичного розвитку вчителів та учнів і відповідних зон предметно-методичного сегмента структури компетентностей учителя переносяться базисні принципи розвивальної наступності й формувальної задачної природи цілісної навчально-математичної діяльності [10; 11].

У [6; 8–10] обговорюється значення сфокусованості програм підвищення кваліфікації на залежності методичної ефективності від координованої інтеграції предметних і дидактичних зв'язків на рівні змістових ліній математичної освітньої галузі. У старшій (профільній) школі максимально розгортається чи не найголовніша з них – змістова лінія «Функції» [12]. Зокрема, вона є провідною для вивчення рівнянь, нерівностей та систем і асоціюється не лише з операціонально-логічними кроками, але – у першу чергу – з виділенням функціональної структури (моделі) таких задач, про що свідчать численні статті й посібники. Диференційоване вивчення тригонометрії в курсі профільного поглибленого навчання математики визнається одним із системотвірних дидактичних ресурсних «майданчиків» для залучення учнів із підвищеними освітніми запитами до евристично-пізнавальної діяльності [10]. І тому в якості одного з пріоритетних напрямів методичної роботи з тригонометричним матеріалом ми мусимо розглядати шляхи компетентнісної конвергенції навчання перетворення тригонометричних виразів і навчання розв'язування рівнянь, нерівностей і систем на парадигмальній основі функціональної сутності та природи цих задач – виокремленні й дослідженні тих функцій, властивості яких визначають пошук розв'язань. Водночас, широкі можливості виникають під час певної методичної «інверсії», коли задачі на дослідження функцій відразу доповнюються прикладами на використання встановлених властивостей у задачах тригонометричного змісту.

Продовжуючи підходи [9], наводимо добірку задач тригонометричного характеру, пов'язаних із нестандартним застосуванням властивостей функцій, упорядковану для авторських семінарів «Предметно-методичний супровід учнівських олімпіад з математики: розвиток ідей шкільного курсу в контексті сучасних олімпіадних завдань», занять на курсах підвищення кваліфікації. Важливо підкреслити, що високий рівень складності й олімпіадний характер задач у поєднанні з досить «економною» реалізацією підсилюють мотиваційний компонент навчання математично обдарованих учнів під час уроків, факультативних, гурткових та індивідуальних занять.

Задача 1 (Фестиваль юних математиків, м. Одеса, 1998 р.). Знайдіть усі дійсні значення параметра a, для яких рівняння $cos2ax - sinax^2 = \frac{3}{2}\pi + ax^2 - 2ax$ має єдиний розв'язок.

□ Тригонометричні формули зведення дозволяють залишити в запису рівняння лише одну тригонометричну функцію, надавши рівнянню вигляд $\left(2ax - \frac{\pi}{2}\right) - sin\left(2ax - \frac{\pi}{2}\right) = (\pi + ax^2) - sin(\pi + ax^2)$ (1.1). При цьому ми досягаємо й виділення функціональної моделі задачі: $f\left(2ax - \frac{\pi}{2}\right) = f(\pi + ax^2)$, де $f(t) = t - sint$. Функція f строго зростає на всій числовій прямій, оскільки $f'(t) = 1 - cost \geq 0$, $t \in R$, причому $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2\pi n,\ \ n \in Z$ [3, с. 133–134]. Отже, рівняння (1.1) є рівносильним рівнянню $2ax - \frac{\pi}{2} = \pi + ax^2$. Очевидно, що $a = 0$ умову задачі не задовольняє, і залишається прирівняти до нуля дискримінант квадратного рівняння $ax^2 - 2ax + \frac{3\pi}{2} = 0$.

Відповідь: $a = \frac{3\pi}{2}$. ■

Задача 2. Розв'яжіть рівняння $20sinx + 3sin5x = 20cosx + 3cos5x$.

□ Нехай $f(x) = 20sinx + 3sin5x$. Тоді рівняння набуде вигляду $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (2.1), яким доставляється функціональна модель задачі. Зауважимо спочатку, що $x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$, не є розв'язками рівняння. Періодичність функції f дозволяє розглядати лише $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Для функції f виконується тотожність $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \equiv f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ (пряма $x = \frac{\pi}{2}$ є однією із осей симетрії графіка функції f). Неважко перевірити, що якщо $\lambda \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ є розв'язком, то й $\lambda + \pi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ також є розв'язком, а якщо $\xi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ є розв'язком, то й $\xi - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ – розв'язок. Це означає, що слід знайти всі розв'язки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а потім «розтиражувати» їх додаванням $\pi n,\ n \in Z$. Зазначимо, що $x = 0$ розв'язком рівняння не буде. На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція f строго зростає, позаяк $f'(x) = 5cosx(48cos^4x - 60cos^2x + 19) > 0,\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\pi}{2} - x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, і рівність (2.1) дає для таких x, що $x = \frac{\pi}{2} - x,\ x = \frac{\pi}{4}$. Якщо ж $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\frac{\pi}{2} + x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, і оскільки $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, то $x = \frac{\pi}{2} + x$, що неможливо.

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. ■

Задача 3 (Всеукраїнська математична олімпіада, 2002 р.). Для $0 \leq x, y, z < \frac{\pi}{2}$ розв'яжіть систему рівнянь

$$\{tgx + siny + sinz = 3x, sinx + tgy + sinz = 3y, sinx + siny + tgx = 3z. \quad \textbf{(3.1)}$$

□ Доведемо, що розв'язок $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ буде єдиним, що задовольняє умову. Функціональна модель задачі виникає, якщо отримати *наслідок* системи (3.1) – рівність $(-3x + 2sinx + tgx) + (-3y + 2siny + tgy) + (-3z + 2sinz + tgz) = 0$ **(3.2)**. Розглянемо на проміжку $[0; \frac{\pi}{2})$ функцію $f(t) = -3t + tgt + 2sint$. Маємо, що $f(0) = 0$, причому на проміжку $[0; \frac{\pi}{2})$ функція f є неперервною й строго зростає, адже $f'(t) = \frac{1+2cos^3t-3cos^2t}{cos^2t} > 0$ для $0 < t < \frac{\pi}{2}$, бо за нерівністю Коші виконується нерівність $1 + cos^3x + cos^3x > 3cos^2t,\ t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Відтак, для $0 \leq x, y, z < \frac{\pi}{2}$ рівність (3.2) виконується лише за умови $x = y = z = 0$.

Відповідь: $x = 0, y = 0, z = 0$. ■

Задача 4 (Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2002 р.). Знайдіть усі такі $x \in R$, що $tgx < tg(x + 1) < tg(x + 2) < tg(x + 3)$. **(4.1)**

□ Ураховуючи π-періодичність функції $f(t) = tgt$, достатньо обмежитись $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right),\ x \neq \frac{3\pi}{2} - 3,\ x \neq \frac{3\pi}{2} - 2,\ x \neq \frac{3\pi}{2} - 1$. Помітимо, що для $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} - 3\right)$ умова (4.1) справджується, оскільки $\frac{\pi}{2} < x < x + 1 < x + 2 < x + 3 < \frac{3\pi}{2}$, а на інтервалі $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ функція $f(t) = tgt$ строго зростає. Водночас, для $\frac{3\pi}{2} - 3 < x < \frac{3\pi}{2}$ маємо: $\frac{3\pi}{2} < x + 3 < \frac{3\pi}{2} + 3 < \frac{3\pi}{2} + \pi,\quad cos\,cos\,(x + 3) > 0,\quad cosx < 0,\quad tg(x + 3) - tgx = \frac{sin3}{cos\,cos\,(x+3)\,cosx} < 0$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{3\pi}{2} - 3 + \pi n, n \in Z$. ■

Задача 5 (Олімпіада «Турнір чемпіонів», м. Вінниця, 2015 р.). Розв'яжіть рівняння $cos3x + 39cosx = 32x^3 + 48x^2 + 96x + 40$. (**5.1**)

□ Використовуючи формулу косинуса потрійного кута, рівняння (5.1) запишемо у вигляді $cos^3x + 9cosx = (2x + 1)^3 + 9(2x + 1)$ **(5.2)**. Ми бачимо, що функціональна структура задачі визначається строго зростаючою на всій числовій прямій функцією $f(t) = t^3 + 9t$. Рівняння (5.2) є рівносильним рівнянню $cosx = 2x + 1$ **(5.3)**. Функція $\varphi(t) = cosx - 2x - 1$ строго спадає на всій числовій прямій, бо $\varphi'(t) = -sint - 2 < 0,\ t \in R$. Оскільки $\varphi(0) = 0$, то $x = 0$ – єдиний розв'язок рівняння (5.3).

Відповідь: $x = 0$. ■

Задача 6 (VI Соросівська олімпіада школярів України, 2000 р.). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\{x^2 + y^2 - 3x = 2y\sqrt{x^2 - 2x - y} + 1, x^2 + arcsiny = y^2 + arcsinx.$$

□ Розглянемо неперервну на відрізку $[-1; 1]$ функцію $f(t) = t^2 - arcsint$, для якої $f'(t) = 2t - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $t \in (-1; 1)$. Подавши $t \in (-1; 1)$ як $t = sin\alpha$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, маємо: $2t - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2t\sqrt{1-t^2}-1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2sin\alpha cos\alpha-1}{cos\alpha} = \frac{sin2\alpha-1}{cos\alpha} \leq 0$. Функція f строго спадає на відрізку $[-1; 1]$ (ми врахували, що рівняння $f'(t) = 0$ має єдиний корінь $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Звідки випливає, що, з необхідністю, $x = y$. Залишається на відрізку $[-1; 1]$ розв'язати рівняння $2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 3x} + 1 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x^2 - 3x}\right)^2 = 1$.

Відповідь: $x = -\frac{1}{5}, y = -\frac{1}{5}$. ■

Вважаємо, що практика моделювання за наведеними зразками компактних тематичних комплексів не лише сприяє розширенню уявлень учителів про дидактичний статус та взаємодію ключових розділів програми профільного поглибленого вивчення математики, але й робить вагомий внесок у вирішення складної педагогічної проблеми формування навичок науково-методичного аналізу матеріалів інтелектуальних змагань.

Список використаних джерел

1. Гончаренко С. У. Фундаменталізація освіти як дидактичний принцип. *Шлях освіти*. 2008. Т. 47. № 1. С. 2–6.

2. Гончаренко С. У. Фундаменталізація професійної освіти як дидактичний принцип. *Теорія і практика управління соціальними системами: філософія, психологія, педагогіка, соціологія*. 2008. № 2. С. 87–91.

3. Дороговцев А. Я. *Математичний аналіз*. Ч. 1. Київ : Либідь, 1993. 320 с.

4. Задоріна О. М., Мітельман І. М., Моторіна В. Г., Папач О. І. Скаффолдинг як інструмент випереджального навчання розв'язування ускладнених геометричних задач методом координат та його дидактико-методичного супроводу. *Інноваційна педагогіка*. 2024. Вип. 74. С. 33-45. DOI: https://doi.org/10.32782/2663-6085/2024/74.5.

5. Захарчук Н. В. Принципи відбору змісту освіти у контексті фундаменталізаційних процесів. *Вісник Національного авіаційного університету. Серія: Педагогіка. Психологія*. 2015. № 6. DOI: https://doi.org/10.18372/2411-264X.6.10199 (дата звернення: 17.04.2025).

6. Мітельман І. М. Формування навичок знаходження найбільших значень функцій трьох змінних під час розв'язування деяких олімпіадних задач. *Збірник наукових праць Сумського державного педагогічного університету «Актуальні питання природничо-математичної освіти»*. 2022. Вип. 2(20). С. 64–74. URL: https://zenodo.org/record/7426573#.ZDR_DfZBzPA.

7. Мітельман І. М. Дидактичні ресурси agile-стратегій підготовки вчителів до роботи з математично обдарованими учнями. *Наша школа: науково-практичні студії*. 2023. № 1(1). С. 65–73. DOI: https://doi.org/10.61339/27866947. 2023.1.286305.

8. Мітельман І. М. Оцінювання деяких виразів з модулем числа під час розв'язування задач з параметрами в дидактичному контексті підвищення кваліфікації вчителів математики.

Академічні візії. 2023. Вип. 20. DOI: http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.8096614 (дата звернення: 17.04.2025).
9. Мітельман І. М. Граничний перехід в олімпіадних задачах на доведення й дослідження нерівностей. *Матеріали VI Всеукраїнської науково-практичної конференції «Педагогічна наука і освіта у сучасному вимірі: проблеми і перспективи розвитку»* (м. Одеса, 17 травня 2024 р.). С. 157–165.
10. Мітельман І. М. Дидактико-методичні аспекти тригонометричної інтерпретації деяких типів алгебраїчних задач підвищеної складності. *Наша школа: науково-практичні студії*. 2024. № 3(7). С. 24–39. DOI: https://doi.org/10.61339/2786-6947.2024.3(7).315923.
11. Семенець С. П. Задачний підхід до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів. *Математика в рідній школі*. 2016. № 4. С. 14–18.
12. Швець В. О. Змістова лінія «Функції» шкільного курсу математики та особливості її вивчення в середній школі. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*. 2024. № 2. С. 7–19. DOI: https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-7-19.
13. Ярхо Т., Ємельянова Т., Легейда Д. Упровадження принципу генералізації знань у повторювальний курс елементарної математики в технічних закладах вищої освіти. *Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки*. 2019. Вип. 3. С. 440–450. DOI: https://doi.org/10.31494/2412-9208-2019-1-3.

Igor Mitelman
Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph. D.), Docent,
Associate Professor at the Department of Teaching Methodology and Educational Content Odessa Regional Academy of In-Service Education
Odesa, Ukraine

TRIGONOMETRIC RESOURCES OF DEVELOPMENT FUNCTIONAL COMPETENCIES AND SOLVING MATHEMATICS OLYMPIAD PROBLEMS

Keywords: fundamentalisation and professionalization of education content, profiling of high school, trigonometry teaching methods, application of function properties, olympiad-type problems.