УДК 378.046.4:372.851:[517.17+517.51]
DOI 10.5281/zenodo.7426573

І. М. Мітельман
ORCID 0000-0002-9817-6690
Комунальний заклад вищої освіти «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради»

ФОРМУВАННЯ НАВИЧОК ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙБІЛЬШИХ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ

Компетентнісна платформа навчання обдарованих учнів, їх підготовки до математичних олімпіад вищого рівня вимагає особливої синхронної та мотивованої взаємодії систем компетентностей усіх учасників освітнього процесу. Математична й методична складова такої синхронізації має формуватись як в практичній роботі зі школярами, так і під час моделювання спеціалізованих методичних кейсів у контексті різних форматів підвищення кваліфікації вчителів. Вагомого значення набуває створення та застосування продуктивних згорнутих дидактичних структур, значною мірою завдяки яким навчають розв'язування складних задач. Такі структури доцільно будувати на основі евристично орієнтованих тематичних систем розгалуженого теоретичного матеріалу, який – через ускладнення сучасних олімпіадних завдань – часто суттєво виходить за межі шкільних програм (навіть і для профільного вивчення математики), навчальних вправ і задач. При цьому неефективно обмежуватись задачним матеріалом суто «відтворювального» характеру.

У статті висвітлюється підхід до конструювання стислої дидактичної системи, спрямованої на оволодіння деякими сучасними методами доведення олімпіадних нерівностей – одним з основних традиційних розділів підготовки талановитих учнів до математичних змагань. Проблемні ситуації, пов'язані з доведенням нерівностей, є актуалізованими складовими однієї з провідних змістових ліній – функціональної, тому вчителі й учні неодмінно потрапляють до кола складних питань дослідження функцій однієї та декількох змінних, нових понять, теорем і комбінації нестандартних методів, які щільно пов'язані з математичним аналізом. На основі досить поширених класів задач розгорнуто взаємодію різних методів доведення, розглянуто поєднання методів доведення певних типів симетричних і циклічних нерівностей з трьома змінними із знаходженням максимальних значень відповідних функцій. Зокрема, такі задачі фактично трансформуються в задачі з параметром, чим значно розширюється математичне та методичне середовище підготовки обдарованих учнів. Проведені дослідження сприяють модернізації змісту та форматів неперервної освіти вчителів, орієнтують школярів, учителів, студентів та викладачів закладів вищої освіти на подальшу пошукову діяльність.

Ключові слова: *підвищення кваліфікації вчителів, математична та методична компетентність, синхронізація компетентнісних систем учителя та учнів, продуктивні дидактичні структури, методика навчання математики, математично обдаровані учні, олімпіадні задачі з математики, методи доведення нерівностей, властивості функцій, математичний аналіз.*

Постановка проблеми. Компетентнісний профіль формування згорнутих продуктивних дидактичних структур, пов'язаних з науковим супроводом роботи з математично обдарованими учнями, вимагає дворівневої взаємодії систем компетентностей [4–6]. Рівновага й цілісність такої взаємодії забезпечується синхронізацією компетентнісних систем учителя та учнів – педагогічного та методичного *попиту* й *пропозиції*. Отже, створення оптимальних умов для поступового переходу від керованих кроків до самостійних висновків і дій учасників освітнього процесу має враховувати два основні сценарії: в *суб'єктно-об'єктній* і *суб'єктно-суб'єктній* парадигмі [6; 7]. Такий підхід, на наш погляд, розширює дещо звужені погляди на синхронізацію компетентностей у педагогічній науці [12], особливо – у тій її частині, що вивчає методику навчання окремих предметів. З точки зору «кібернетичних» підходів розгортання складної математичної ідеї (вивчення класу олімпіадних задач і т. п.) одночасно в *розгалуженому* компетентнісному середовищі вчителя й у більш *лінеаризованій* системі спеціалізованих математичних компетентностей учнів створює ризики утворення неконтрольованих обсягів наукових результатів і прийомів розв'язування задач тощо. Запобігання надто негативному впливу таких чинників на досягнення поставлених цілей навчання може використовувати ідею виваженого моделювання *критичних секцій* – «комірок» компетентнісного простору, які, з одного боку, стають спільним ресурсом і керують накопиченням фактичного матеріалу, а з іншого – дозволяють не створювати зайвого дублювання, утворення хибних асоціацій, некоректного застосування теорії, методів, виконання розумових дій, одночасність яких може носити навіть і деструктивний характер. Підкреслимо, що синхронізація компетентнісних систем учасників освітнього процесу в методологічному, процедурному, логічному, дослідницькому, технологічному компонентах математичних (а для вчителів ще й спеціалізованих предметно-методичних) компетентностей має забезпечити таку координацію мотиваційних, змістових і дійових процесів, коли певні етапи різних процесів (зокрема – під час розв'язування складних олімпіадних задач) відбуваються в належному порядку розділеними потоками або ж одночасно (проте, із залученням механізмів уникнення конкурентних перешкод та / або взаємного блокування).

Ресурси компетентнісного простору вчителя математики є фундаментальною зоною відповідальності післядипломної (неперервної) педагогічної освіти [7]. Сегмент роботи з математично обдарованими учнями потребує постійного вдосконалення фахової бази вчителя математики, відбору й адаптації нового теоретичного та задачного матеріалу. Як зазначає С. П. Семенець [9], цілісна навчально-математична діяльність та розвиток математичних здібностей учнів мають формувальну задачну структуру і, відповідно, потребують задачного підходу. У роботі [9] йдеться про створення ***зон найближчого математичного розвитку учнів*** (базової, навчальної, навчально-теоретичної і навчально-дослідницької) і доречно підкреслюється, що названі зони встановлюються в умовах співпраці (співробітництва) вчителя та учнів. Ми вважаємо, що підготовка обдарованих учнів до математичних олімпіад високого рівня при цьому повинна забезпечуватись особливим рівнем змістового наповнення зон найближчого математичного розвитку. Відтак, у цьому сенсі для ключових розділів олімпіадної підготовки необхідно створювати й оновлювати зручні за обсягом опціональні *дидактичні комплекси*, до яких інтегруються *нові математичні поняття, теореми і теоретичні факти* (з доведенням чи – у деяких ситуаціях – з іншими валідними засобами обґрунтування), *задачні «ланцюжки»* (з обов'язковим урахуванням мотиваційного аспекту щодо усвідомлення учнями в режимі реального часу переваг оволодіння новітніми технологіями роботи із задачним матеріалом), які для більшості задач передбачають різні способи розв'язування [2]. І тому виділені зони слід розглядати не лише з точки зору найближчого математичного розвитку учнів, але – одночасно – у контексті розвитку вчителя, тобто в процесі колективної й колективно розподіленої творчості. Над цією актуальною науково-методичною проблемою працює кафедра методики викладання і змісту освіти КЗВО «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради», причому ми вважаємо, що ефективність запропонованих конкретних дидактичних кроків зумовлюється станом вирішення згаданих вище теоретичних і практичних аспектів взаємодії систем компетентностей учителів та учнів на основі механізмів їх синхронізації в розширеному розумінні.

Аналіз актуальних досліджень. Доведення нерівностей вважається одним з найбільш важливих обов'язкових розділів класичної олімпіадної підготовки, оскільки він об'єднує майже всі змістові лінії курсу математики. З численних сучасних робіт, присвячених систематизації, науково-методичному узагальненню та опрацюванню різноманітних методів доведення нерівностей, стратегіям конвертації та адаптації ідей деяких розділів вищої математичної освіти для застосування під час підготовки талановитих учнів до розв'язування відповідних типів задач на математичних олімпіадах вищого рівня виділимо публікації T. Andreescu, V. Cîrtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu, Z. Cvetkovski, Ph. Hung, R. Manfrino, J. Ortega, R. Delgado, Ph. Tran, H. Lee, K. Li, О. М. Вороного, В. М. Лейфури, В. М. Радченка, Н. М. Седракяна, Р. П. Ушакова, І. В. Федака, В. А. Ясінського. У [11; 14–16], зокрема, наводиться чимало прикладів застосування запропонованої Hojoo Lee **SD3**-Theorem (Symmetric Inequality of Degree 3) для симетричних однорідних многочленів третього степеня з трьома змінними [17] та її узагальнення – **CD3**-Theorem (Cyclic Inequality of Degree 3) для циклічних однорідних многочленів третього степеня з трьома змінними [16, с. 310]. У навчально-методичному посібнику Р. І. Собковича та Н. В. Кульчицької [10] наводяться «блоки» вдало підібраних задач (з усіма ознаками формувальних дидактичних комплексів) як для базової олімпіадної підготовки, гурткових, факультативних занять, так і для профільного (поглибленого) вивчення математики в закладах середньої освіти, підготовки студентів, підвищення кваліфікації вчителів тощо. Деякі методичні особливості застосування математичного аналізу для доведення нерівностей олімпіадного характеру розкриваються, наприклад, у статті О. В. Мартиненко та Я. О. Чкани [3]. Значний обсяг актуального задачного матеріалу розміщується та постійно поповнюється на відкритих інтернет-ресурсах міжнародних та національних математичних олімпіад, персональних web-сторінках відомих експертів, включається до збірників задач тощо. З методологічної точки зору виділимо, знов-таки, наукові розвідки С. П. Семенця, в яких на засадах діяльнісної теорії навчання висвітлюється зміст задачного підходу до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів, встановлюються зони їхнього найближчого математичного розвитку. Автор статті на прикладах різних типів олімпіадних задач неодноразово звертався (див., наприклад, [2; 4–7]) до питань формування продуктивних згорнутих дидактичних структур, завдяки яким, на нашу думку, відбувається навчання розв'язування складних задач, і які лежить в основі запропонованого нижче обговорення. Ми послідовно (на різних тематичних прикладах) дотримуємось принципів поєднання ситуаційних підходів до розвитку спеціалізованих методичних компетентностей учителів математики з вимогами щодо практичної синхронізації компетентнісних систем учителів та обдарованих учнів як партнерів у досягненні спільної творчої мети, у створенні спільного ресурсу для значного підвищення якості сучасного освітнього процесу.

Мета статті. Теорія навчання математики, багаторічний світовий та вітчизняний методичний і практичний досвід переконливо демонструють, що під час опанування сучасних методів роботи з олімпіадними нерівностями принципові затруднення викликає оперування з функціями декількох змінних, до якого школярі не мають стійких навичок (тим більше, коли йдеться про застосування апарату математичного аналізу). Функції трьох змінних є важливим представником функцій декількох змінних: багато які із задач на доведення нерівностей з формулюванням версій для трьох змінних не втрачають своєї принципової складності, не змінюють методологію розв'язування, але набувають інколи навіть і додаткових рис щодо корисної геометричної інтерпретації та стимулюють природне розширення та синхронізацію математичних і методичних компетентностей (до того ж, зауважимо, тривимірний випадок може мати власну специфіку, якщо, наприклад, йдеться про певні класи многочленів з трьома змінними). Численні олімпіадні задачі на доведення нерівностей можуть бути переформульовані у вигляді задач на знаходження найбільших значень функцій на відповідних множинах, після чого розгортається широкий потенціал застосування додаткових методів і теоретичних фактів, багато з яких вимагають значних зусиль для осмислення й оволодіння в першу чергу вчителями математики, які прагнуть ефективно оновлювати власний математичний та методичний компетентнісний арсенал. Стаття ставить за мету на прикладі формування спеціальних навичок знаходження найбільших значень функцій трьох змінних сприяти удосконаленню методичної техніки створення продуктивних згорнутих асоціацій та згорнутих структур мислення у контексті дворівневої взаємодії систем компетентностей шляхом моделювання евристично орієнтованого комплексу задач та «насиченого» теоретичного матеріалу високого рівня складності, яким синхронізуються компетентнісні системи учителя та математично обдарованого учня. Зазначимо, що така мета є важливою не лише для активізації та актуалізації набутих компетентностей як закріпленого освітнього результату – результативності учнів на олімпіадах і турнірах, але й з точки зору постійної модернізації змісту неперервної освіти творчого вчителя математики.

Методи дослідження. Дослідження базується на методах системного науково-методологічного аналізу наукової, навчально-методичної літератури, задачних матеріалів математичних олімпіад вищого рівня, синтезі й узагальненні теоретичних положень та практичних висновків і рекомендацій, які містяться в науково-методичних та наукових джерелах, спостереженні та аналізі різнорівневого навчального процесу з підготовки учнів та студентів, роботи з учителями математики в системі післядипломної педагогічної освіти, у тому числі й під час авторських науково-практичних семінарів «Предметно-методичний супровід учнівських олімпіад з математики: розвиток ідей шкільного курсу в контексті сучасних олімпіадних завдань», методичних тренінгів і консультацій. Важливим джерелом є узагальнення власного науково-педагогічного досвіду, здобутків інших фахівців з питань науково-методичного супроводу математичних олімпіад, створення задач і комплектів завдань для проведення математичних змагань.

Виклад основного матеріалу. Ми розглядаємо формувальні складові навчальної системи задач і теоретичних положень, пов'язаних з доведенням нерівностей, трансформованих у задачі на знаходження найбільших чи найменших значень функцій з трьома змінними. Деякі з розібраних задач зручно додатково розв'язувати за допомогою інших потужних і досить універсальних методів – наприклад, *методу умовних множників Лагранжа* [8]. Не зупиняємось тут на цьому класичному методі хоча б тому, що математична підготовка учнів для його доведення, розуміння, свідомого застосування потребує досить серйозних знань, які виходять за межі реального навчання, але вважаємо доцільним звернути увагу на цей аспект під час підготовки студентів математичних спеціальностей для майбутньої роботи з обдарованими учнями. Заради справедливості зазначимо, що повноцінні доведення деяких теорем, до яких ми звертаємось нижче, також передбачають володіння певним апаратом диференціального числення функцій декількох змінних і вимагають від учителів, які прагнуть долучити своїх найкращих учнів до застосування цієї техніки, методичної майстерності та глибоких власних знань. І це також є компонентою динамічної синхронізації учнівських та вчительських компетентнісних систем. Ми підкреслимо, що високий дидактичний ефект передбачається досягти саме поєднанням **SD3**-теореми і **CD3**-теореми, інших специфічних технічних прийомів з класичними і добре відомими вчителям методичними й математичними ідеями.

Серед властивостей неперервної на відрізку числової функцій однієї змінної учні старшої школи розглядають теорему Вейєрштрасса про найбільше та найменше її значення. Під час підготовки до математичних олімпіад високого рівня варто звернути серйозну увагу на більш загальний варіант цієї важливої теореми: неперервна на *компактній* множині $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функція $F:\Omega \to \mathbb{R}$ досягає на цій множині своїх найбільшого та найменшого значень. Усі функції в розібраних нижче задачах є неперервними, і це поняття (як і поняття *компактної* множини) в контексті використання функцій декількох змінних потребує спеціального обговорення навіть і з найбільш підготовленими учнями.

Задача 1 (*Олімпіада США*, 1980 р.). Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел $a,b,\mathrm{c} \in [0;1]$ має місце нерівність

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \le 1.$$

Розв'язання. Одне з відомих розв'язань цієї задачі ґрунтується на штучних перетвореннях [1, с. 153].

Якщо ж поставити питання про знаходження найбільшого значення функції

$$F(a,b,c)=\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c),\ 0 \le a,b,c \le 1,$$

то, на перший погляд, задача ускладнюється («зникає» права частина нерівності, яка може брати участь у перетвореннях). Але ж функція F за **кожною змінною окремо** є опуклою донизу на відрізку $[0;1]$, і тому $\max\{F(a,b,c):0\le a,b,c\le 1\}=1$ ми легко знаходимо як найбільше з чисел $F(a,b,c)$, де $a,b,c\in\{0;1\}$.

Задача 2 (*Міжнародна олімпіада*, 1984 р.). Доведіть, що для таких невід'ємних дійсних чисел x,y,z, що $x+y+z=1$, виконується нерівність

$$0\le xy+yz+zx-2xyz\le\frac{7}{27}.$$

Розв'язання. Цю задачу можемо сформулювати і як задачу на знаходження найменшого та найбільшого значень неперервної на компактній множині

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0; x+y+z=1\right\}$$

функції $F(x,y,z)=xy+yz+zx-2xyz$. Оскільки $F(0,0,0)=0$, і на множині Ω $xy+yz+zx-2xyz\ge 3xyz-2xyz=xyz\ge 0$, то $\min\limits_{\Omega}F=0$. Далі, $F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$. Для доведення того факту, що $\max\limits_{\Omega}F=\frac{7}{27}$, застосуємо прийом, який інколи називають «*the mixing variables method*» (див. також [13, с. 62]). Ми можемо вважати, що $x\le y\le z$, і тоді $x\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$. Позначимо $t=\frac{y+z}{2}$, $t\in\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$. Покажемо, що $F(x,y,z)\le F(x,t,t)$: $F(x,t,t)-F(x,y,z)=\left(t^2-yz\right)(4t-1)\ge 0$, бо $t^2=\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\ge yz$, $4t>1$. Оскільки $F(x,t,t)=F(1-2t,t,t)$, то стандартними методами диференціального числення достатньо встановити, що $\max\limits_{t\in\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]}F(1-2t,t,t)=\frac{7}{27}$.

Розглянемо ще одну задачу, для якої застосування цього методу є ефективним.

Задача 3 (див. також [14, с. 61]). Знайдіть найбільше значення неперервної на компактній множині

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0; x+y+z=3\right\}$$

функції $F(x,y,z)=\frac{1}{2x^2+7}+\frac{1}{2y^2+7}+\frac{1}{2z^2+7}$.

Розв'язання. Нехай $x\ge y\ge z$, $t=\frac{y+z}{2}$, $t\in[0;1]$. Знайдемо $\max\limits_{t\in[0;1]}F(x,t,t)=\max\limits_{t\in[0;1]}F(3-2t,t,t)$. Маємо:

$$\frac{d}{dt}F(3-2t,t,t)=-\frac{24(t-1)(2t-1)\varphi(t)}{(2t^2+7)^2(8t^2-24t+25)^2},\ \varphi(t)=12t^3-48t^2+94t-49.$$

Зауважимо, що для всіх $t\in\mathbb{R}$ $\varphi'(t)>0$, і функція φ строго зростає на всій числовій прямій, $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)<0$, $\varphi(1)>0$, а тому єдиний корінь ξ рівняння $\varphi(t)=0$ належіть інтервалу $\left(\frac{1}{2};1\right)$. Відтак, функція $\psi(t)=F(3-2t,t,t)$ строго зростає на кожному з відрізків $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ і

$[\xi;1]$ та спадає на відрізку $\left[\frac{1}{2};\xi\right]$. Позаяк $\psi\left(\frac{1}{2}\right)=\psi(1)=\frac{1}{3}$, то $\max\limits_{t\in[0;1]} F(x,t,t)=\frac{1}{3}$.
Залишається переконатись у тому, що $F(x,y,z)\le F(x,t,t)$, тобто

$$\frac{(y-z)^2(7-4t^2-2yz)}{(2t^2+7)(2y^2+7)(2z^2+7)}\ge 0,$$

що насправді виконується, адже

$$\sqrt{yz}\le\frac{y+z}{2}=t\le 1,\ 7-4t^2-2yz=1+4(1-t^2)+2(1-yz)\ge 0.$$

Ми довели, що $\max\limits_{\Omega} F=\frac{1}{3}$.

Зауваження 1. Максимальне значення досягається тоді й тільки тоді, коли $x=y=z=1$ або ж якщо одне з чисел x,y,z дорівнює 2, а два інші дорівнюють $\frac{1}{2}$ (тобто – звернемо увагу – у «несиметричній» ситуації). З цього випливає також і те, що $\max\limits_{\Omega_0} F=\frac{1}{3}$ для будь-якої множини $\Omega_0\subset\Omega$, яка містить хоча б одну з точок $(1,1,1)$, $\left(2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$.

Зауваження 2. Важливо, що розв'язати цю задачу застосуванням нерівності Єнсена – як це робиться для багатьох подібних олімпіадних задач – не вдається, оскільки функція $h(x)=\frac{1}{2x^2+7}$ на відрізку $[0;3]$ не є опуклою.

Зауваження 3. Якби ми відразу запропонували довести нерівність $\frac{1}{2x^2+7}+\frac{1}{2y^2+7}+\frac{1}{2z^2+7}\le\frac{1}{3}$ на множині Ω (як це, власне, було в [14, с. 61]), то доведення нерівності $\frac{1}{3}-\psi(t)\ge 0$, $t\in[0;1]$, простими перетвореннями було б зведено до очевидної нерівності $\frac{(t-1)^2(2t-1)^2}{(2t^2+7)(2(3-2t)^2+7)}\ge 0$. Звісно, під час розв'язування можна і самостійно висунути гіпотезу щодо значення $\frac{1}{3}$ як відповіді до задачі.

Зауваження 4. Розглянемо окремо від зауваження 1 задачу знаходження найбільшого значення нашої функції $F(x,y,z)=\frac{1}{2x^2+7}+\frac{1}{2y^2+7}+\frac{1}{2z^2+7}$ на множині $\Theta=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:0\le x,y,z\le\frac{5}{4};x+y+z=3\right\}\subset\Omega$.

На відрізку $\left[0;\frac{5}{4}\right]$ графік функції $h(x)=\frac{1}{2x^2+7}$ має точку перегину $\tilde{x}=\sqrt{\frac{7}{6}}$, і тому використати нерівність Єнсена ми не зможемо. Утім, якщо ми запишемо рівняння дотичної $y=-\frac{4}{81}x+\frac{13}{81}$ до графіка функції h у точці $x_0=1$, то встановлюємо, що попри відсутність опуклості нерівність $h(x)\le-\frac{4}{81}x+\frac{13}{81}$, рівносильна нерівності $(x-1)^2(4x-5)\le 0$, усе ж таки виконується на відрізку $\left[0;\frac{5}{4}\right]$. Отже, на множині Θ маємо:

$$\frac{1}{2x^2+7}+\frac{1}{2y^2+7}+\frac{1}{2z^2+7}\le -\frac{4}{81}(x+y+z)+\frac{39}{81}=\frac{1}{3}=F(1,1,1),$$

і тому $\max_{\Theta} F=\frac{1}{3}$. (Див. також [13; 18].)

Пропонуємо тут результативний спосіб поєднання методів доведення поширеного класу симетричних і циклічних однорідних нерівностей з трьома змінними із знаходженням максимальних значень відповідних функцій (очевидно, що окремо розглядати знаходження мінімальних значень функцій потреби немає). Фактично ми трансформуємо такі задачі в *задачі з параметром*, чим значно розширюється математичне та методичне середовище підготовки математично обдарованих учнів.

Нехай задано обмежену зверху функцію $F:\Omega\to\mathbb{R}$. Позначимо $\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{R}:\forall x\in\Omega\ F(x)\le\lambda\}$ (це – сукупність усіх верхніх меж множини $\mathcal{E}(F)$ значень функції F), $\Lambda\ne\varnothing$. Тоді, як відомо, існує $\min\Lambda=\sup_{\Omega}F$. Коли $m_0=\min\Lambda\in\mathcal{E}(F)$, то $m_0=\max_{\Omega}F$.

Звернемось знову до основного змісту **задачі 2**.

Задача 2°. Знайдіть найбільше значення функції $F(x,y,z)=xy+yz+zx-2xyz$ на множині $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0; x+y+z=1\right\}$.

Розв'язання. Розглянемо допоміжну функцію

$$\Psi(x,y,z)=\lambda(x+y+z)^3-(xy+yz+zx)(x+y+z)+2xyz.$$

Функція F є неперервною на компактній множині $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, а тому й обмеженою на цій множині. Зауважимо, що властивість *однорідності* многочлена $\Psi(x,y,z)$ дає нам, що $\lambda-F(x,y,z)\ge 0$ для всіх $(x,y,z)\in\Omega$ тоді й тільки тоді, коли $\Psi(x,y,z)\ge 0$ для всіх невід'ємних дійсних чисел x,y,z. До *симетричного однорідного* многочлена **третього** степеня з трьома змінними $\Psi(x,y,z)$ застосуємо **SD3**-теорему [16, с. 310–311; 17]: $\Psi(x,y,z)\ge 0$ для всіх невід'ємних дійсних чисел x,y,z тоді й тільки тоді, коли одночасно мають місце нерівності $\Psi(1,1,1)\ge 0$, $\Psi(1,1,0)\ge 0$, $\Psi(1,0,0)\ge 0$, тобто коли $\lambda\ge\frac{7}{27}$. Ми маємо, що $\Lambda=\left[\frac{7}{27};+\infty\right)$. Залишається врахувати, що $F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$.

Зауваження 1. Фактично ми використали лише обмеженість зверху функції F. Її неперервність на компактній множині Ω навіть позбавляє нас необхідності перевіряти, що $\min\Lambda=\frac{7}{27}\in\mathcal{E}(F)$, оскільки $\min\Lambda=\sup_{\Omega}F$, а властивість неперервності гарантує, що $\sup_{\Omega}F$ досягається і, насправді, буде найбільшим значенням функції F на множині Ω.

Зауваження 2. За допомогою цього прийому можна було доводити й саму нерівність задачі 2, але ми акцентуємо увагу на питанні знаходження найбільшого значення функції.

Задача 4 (див. також [20, с. 118]). Знайдіть найбільше значення функції $F(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$ на множині

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0; x+y+z=1\right\}.$$

Розв'язання. Розберемо спочатку розв'язання з використанням важливого для олімпіадної підготовки класичного *методу впорядкованих наборів* («*the rearrangement* *inequality*») [15, с. 61; 19, с. 15]. Многочлен $F(x,y,z)$ є циклічним, і тому ми розглядаємо два випадки:

$$x^2y+y^2z+z^2x=\begin{bmatrix} x & \le & y & \le & z \\ xy & & yz & & xz \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x & \le & y & \le & z \\ xy & \le & xz & \le & yz \end{bmatrix}=$$

$$=x^2y+xyz+z^2y\le y(x+z)^2=y(1-y)^2;$$

$$x^2y+y^2z+z^2x=\begin{bmatrix} x & \le & z & \le & y \\ xy & & xz & & yz \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x & \le & z & \le & y \\ xz & \le & xy & \le & yz \end{bmatrix}=$$

$$=x^2z+xyz+y^2z\le z(x+y)^2=z(1-z)^2.$$

Найбільше значення функції $h(t)=t(1-t)^2$ на відрізку $[0;1]$ знаходимо або за допомогою диференціального числення, або ж – використовуючи нерівність Коші (з урахуванням умови рівності в цій нерівності): $2t(1-t)(1-t)\le\left(\dfrac{2t+(1-t)+(1-t)}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$.

Відтак, $\max\limits_{t\in[0;1]} t(1-t)^2=\dfrac{4}{27}$, $F\left(0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$, і тому $\max\limits_{\Omega} F=\dfrac{4}{27}$.

Тепер повернемось до застосування описаної вище ідеї. Задана неперервна функція F є обмеженою на компактній множині Ω. Утворюємо допоміжний многочлен $\Psi(x,y,z)=\lambda(x+y+z)^3-F(x,y,z)$. Знов-таки, його однорідність дає нам, що $\lambda-F(x,y,z)\ge 0$ для всіх $(x,y,z)\in\Omega$ тоді й тільки тоді, коли $\Psi(x,y,z)\ge 0$ для всіх невід'ємних дійсних чисел x,y,z. Але многочлен $\Psi(x,y,z)$ є *циклічним однорідним* многочленом третього степеня з трьома змінними, і тому ми використовуємо вже **CD3**-теорему [16, с. 310–311]: $\Psi(x,y,z)\ge 0$ для всіх невід'ємних дійсних чисел x,y,z тоді й тільки тоді, коли одночасно мають місце нерівності $\Psi(1,1,1)\ge 0$, $\Psi(t,1,0)\ge 0$ для всіх дійсних $t\ge 0$. Звідки випливає, що

$$\lambda\ge\max\left\{\frac{1}{9};\max_{t\ge 0}\frac{t^2}{(t+1)^3}\right\}=\max\left\{\frac{1}{9};\frac{4}{27}\right\}=\frac{4}{27},\ \Lambda=\left[\frac{4}{27};+\infty\right).$$

Оскільки $F\left(0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$, то $\dfrac{4}{27}\in\mathcal{E}(F)$ і $\max\limits_{\Omega}F=\dfrac{4}{27}$. (Звернемо також увагу і на *зауваження* 1 до розв'язання задачі 2°.)

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Побудована комплексна система задач та спеціалізації й трансформації широкого кола теоретичного матеріалу (навіть і суттєво «нешкільного» характеру) з урахуванням оптимізації ресурсів навчального часу підтверджує важливе значення тематики, пов'язаної з доведенням нерівностей і знаходженням найбільших (найменших) значень відповідних функцій. Розширено уявлення про особливий статус методів математичного аналізу для розв'язування задач цього типу та про дієвість поєднання техніки диференціального числення з іншими прийомами міркувань.

Ми бачимо, що кожна задача в запропонованій доволі компактній цілісній системі виконує своє теоретичне та операційне навантаження, тобто ініціює просування у вивченні нових понять і теорем, оволодінні конкретними ефектними прийомами розв'язування складних олімпіадних задач. Суттєво, що всі розглянуті задачі можуть бути розв'язані багатьма способами, які представляють інколи навіть різні тематичні пласти. Аналіз різних способів розв'язування подібних задач, пошук глибоких математичних і методичних зв'язків між зовнішньо несхожими підходами створює особливе середовище для формування та розгортання продуктивних дидактичних структур у контексті узгодженого розвитку компетентнісних систем усіх учасників освітнього процесу (у тому числі і в розрізі зон найближчого математичного розвитку), адже вчитель практично в режимі реального часу під час *активностей* у системі підвищення кваліфікації та / або безпосередньо після математичних олімпіад високого рівня знайомиться з новими для нього ідеями і майже **синхронно** повинен сам опановувати складний матеріал і залучати до його застосування математично обдарованих учнів, підготовкою яких він опікується.

Моделювання та застосування аналогічних дидактичних комплексів апробовано автором під час проведення занять з підготовки команд до IV етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, до Всеукраїнських турнірів юних математиків, Міжнародних математичних олімпіад, а також під час проведення в різних форматах занять і семінарів для вчителів математики на кафедрі методики викладання і змісту освіти Одеської академії неперервної освіти. Подальші дослідження мають сприяти удосконаленню науково-методичного супроводу роботи з математично обдарованими учнями на *спільній компетентнісній платформі*, розширенню змісту роботи з учителями в системі післядипломної педагогічної освіти, заохоченню їхньої математичної й методичної пошукової творчості. Варто активно впроваджувати такий матеріал не лише для проведення факультативних і гурткових занять, індивідуальної роботи з переможцями олімпіад, але й для реалізації проєктних методів роботи з талановитими учнями, підготовки учнівських робіт для конкурсів Малої академії наук. Слід також звернути увагу на необхідність напрямленої актуалізації формувальних дидактичних комплексів під час професійної підготовки студентів математичних спеціальностей до майбутньої роботи з учнями, що мають високий пізнавальний потенціал, зокрема й для виконання курсових і дипломних робіт.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Конягин, С. В. и др. (1987). Зарубежные математические олимпиады. Москва: Наука. (Konjagin, S. V. et al (1987). Foreign mathematical olympiads. Moskva: Nauka).
2. Лейфура, В. М., Мітельман, І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. (1999). Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Львів: Євросвіт. (Leifura, V. N., Mitelman, I. M., Radchenko, V. M., Yasinskyi, V. A. (1999). The problems of International mathematical olympiads and methods of their solving. Lviv: Yevrosvit).
3. Мартиненко, О. В., Чкана, Я. О. (2017). Використання методів математичного аналізу для доведення нерівностей. Актуальні питання природничо-математичної освіти, 1(9), 35–45. (Martynenko, O. V., Chkana, Ya. O. (2017). Using of methods of mathematical analysis for proving inequalities. Topical Issues of Natural Science and Mathematics Education, 1(9), 35–45).
4. Мітельман, І. М. (2019). Розвиток предметно-галузевих компетентностей учителів математики в контексті формування згорнутих дидактичних структур. Професійна компетентність сучасного педагога: методологія, теорія, методика, практика, В. В. Ягоднікова (ред.), (сс. 241–257). Одеса: видавець Букаєв Вадим Вікторович. (Mitelman, I. M. (2019). Development of subject-specific competencies of mathematics teachers in the context of the formation of convoluted didactic structures. In V. V. Yagodnikova (Ed.), Professional Competence of a Modern Teacher: Methodology, Theory and Practice (pp. 241–257). Odesa: vydavets Bukaiev Vadym Viktorovych).
5. Мітельман, І. М. (2020). Розвиток дійового компонента спеціалізованих компетентностей учителів під час аналізу функціональних рівнянь математичних олімпіад. Шкільна природничо-математична освіта: виклики та шляхи розвитку: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (25 листопада 2020 р., Одеса), 29–34. (Mitelman, I. M. (2020). Development of active component of specialized teachers competencies in analysis of functional equations of mathematical olympiads. School Natural and Mathematical Education: Challenges and Ways of Development: Materials of the All-Ukrainian Scientific and Practical Conference (Nov 25, 2020, Odesa), 29–34).
6. Мітельман, І. М. (2021). Синхронізація спеціалізованих компетентностей під час підготовки учнів до математичних олімпіад. Педагогічна наука і освіта у сучасному вимірі: проблеми і

перспективи розвитку: Матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції (14 травня 2021 р., Одеса), 198–204. (Mitelman, I. M. (2021). Synchronization of specialized competencies in the preparation of students for mathematical olympiads. Pedagogical Science and Education in Modern Dimension: Problems and Prospects for Development: Proceedings of the 3rd All-Ukrainian Scientific and Practical Conference (May 14, 2021, Odesa), 198–204).

7. Мітельман, І. М. (2021). Особливості моделювання спеціалізованих методичних кейсів у контексті підвищення кваліфікації вчителів математики. Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету, 2, 137–149. (Mitelman, I. M. (2021). Peculiarities of modelling of specialized methodical cases in the context of professional development of mathematics teaches. Collection of scientific works of Uman State Pedagogical University, 2, 137–149).
8. Радченко, В. М. (2002). Функції багатьох змінних у доведенні нерівностей. У світі математики, 4, 37–44. (Radchenko, V. M. (2002). Functions of many variables in the proving of inequalities. In the World of Mathematics, 4, 37–44).
9. Семенець, С. П. (2016). Задачний підхід до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів. Математика в рідній школі, 4, 14–18. (Semenets, S. P. (2016). A task approach to formation of educational mathematical activity and the development of mathematical abilities of students. Mathematical in Native School, 4, 14–18).
10. Собкович, Р. І., Кульчицька, Н. В. (2014). Основні методи доведення нерівностей. Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника – Івано-Франківський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти. (Sobkovych, R. I., Kulchytska, N. V. (2014). Basic methods for proving inequalities. Ivano-Frankivsk: Vasyl Stefanyk Precarpathian National University – Ivano-Frankivsk Regional Institute of Professional Teacher Development).
11. Ясінський, В. А. (2006). Новітні технології доведення нерівностей многочленів з трьома змінними. Математика в школі, 8, 26–32. (Yasinskyi, V. A. (2006). The newest techniques for proving polynomial inequalities with three variables. Mathematics in School, 8, 26–32).
12. Яструб, О. О. (2021). Синхронізація компетентностей дошкільної та початкової освіти як вимога сьогодення. Науковий вісник Ужгородського національного університету. Педагогіка і соціальна робота, 1(48), 473–476. (Yastrub, O. O. (2021). Synchronization of competencies of preschool and primary education as a requirement of nowadays. Scientific Bulletin of Uzhhorod National University. Pedagogy and Social Work, 1(48), 473–476).
13. Chen, E. A brief introduction to olympiad inequalities. Retrieved from: https://web.evanchen.cc/olympiad.html.
14. Cîrtoaje, V. (2021). Mathematical inequalities. Volume 2: Symmetric rational and nonrational inequalities: Lambert Academic Publishing.
15. Cvetkovski, Z. (2021). Inequalities. Theorems, techniques and selected problems. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.
16. Hung, P. K. (2008). Secrets in inequalities. Volume 2: Advanced Inequalities: GIL Publishing House.
17. Lee, H. (2005). Topics in inequalities. Retrieved from: https://fdocuments.net/document/topics -in-inequalities-hojoo-lee-topics-in-inequalities-hojoo-lee-version-05.html.
18. Li, K. (2006). Using tangent lines to prove inequalities. Mathematical Excalibur (2005–2006), 5(10), Part 1.
19. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V. (2005). Inequalities. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. México: Instituto de Matemáticas de UNAM.
20. Tran, P. (2007). Diamonds in mathematical inequalities. Ha Noi: Hanoi Publishing House.

Mitelman I. M. Formation of skills in finding the largest values of functions of three variables in solving some olympiad problems.

Summary. *The competence-based platform for teaching gifted schoolchildren, their preparation for high-level mathematical olympiads requires a special synchronous and motivated interaction of competence systems of all educational process participants. The mathematical and* *methodological component of such synchronization should be formed in practical work with schoolchildren as well as in modeling specialized methodological cases in the context of a variety of teacher skill development formats. Creating and applying of productive convolved didactic structures, singificantly due to which leaning to solve complex problems takes place, are gaining importance. It is advisable to build such structures on the basis of heuristically oriented thematic systems of branched theoretical material, due to the complication of modern olympiad tasks, which often go far beyond school programs (even for the profile study of mathematics), training exercises and problems. At the same time, it is inefficient to restrict oneself on task material, which has only «representational» nature.*

The article highlights the approach to the construction of a compressed didactic system aimed at mastering certain modern methods of proving olympiad inequalities – one of the key traditional sections of preparing talented schoolchildren for mathematical competitions. Problematic situations related to the proof of inequalities are actualized components of one of the leading meaningful lines – functional, and therefore teachers and schoolchildren necessarily find themselves in a stream of complex issues of studying functions of one and several variables, new concepts, theorems and combinations of extraordinary methods closely related to mathematical analysis. Based on very widespread problem classes, the interaction of various proof methods is developed, a combination of methods for proving certain types of symmetric and cyclic inequalities with three variables with finding the maximum values of the corresponding functions is considered. In particular, such tasks are actually transformed into problems with a parameter, which significantly expands the mathematical and methodological space for the training of gifted schoolchildren. The conducted researches contribute to the modernization of the content and formats of in-service teacher education, navigate schoolchildren, teachers, students and lecturers of higher education institutions in creative search.

Key words: *professional teacher development, mathematical and methodological competence, synchronization of the competence systems of teacher and students, productive didactic structures, mathematics teaching methodology, mathematically gifted students, olympiad-type problems in mathematics, methods for proving inequalities, properties of functions, mathematical analysis.*