

Тригонометричні контури синхронізації функціональних компетентностей на основі задач математичних олімпіад

Мітельман Ігор Михайлович¹

Опубліковано	Секція	УДК
30.07.2025	Освіта/Педагогіка	378.046.4:[373.5.016:51]: [512+517]
DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.16883783		

Анотація. У статті продовжено аналіз дидактико-методичних стратегій у вимірі генералізації знань, розвитку та синхронізації математичних і предметно-методичних компетентностей, зорієнтованих на академічну профілізацію (поглиблене вивчення математики), а також на підготовку обдарованих учнів до математичних олімпіад.

У старшій (профільній) школі зростає концептуальне значення змістової лінії «Функції»: розв'язування рівнянь і нерівностей, систем, доведення нерівностей та деякі інші типи задач дедалі частіше пов'язуються не лише зі стандартними методами, що належать до змістових ліній «Числа і вирази», «Рівняння і нерівності», а й з інтерпретацією цих задач через властивості функцій. Це відкриває можливості для розширеного тлумачення функціональних компетентностей, особливо у випадках задач підвищеної складності й олімпіадних задач, де ключовим є виявлення нестандартної функціональної структури.

Тригонометричний матеріал із його операційно-логічним багатством та концентрованим функціональним змістом традиційно виступає базисним дидактичним «майданчиком» для евристично-пізнавальної діяльності.

Метою статті є удосконалення підходів до побудови згорнутих структур типу «теорія-задача» в математичному та предметно-методичному компетентнісному мисленні, а також моделювання прикладу дидактичного комплексу на основі різнопланових мультиідейних задач олімпіадного рівня. У таких задачах функціональна природа не задана явно чи формально, а розкривається лише внаслідок неочевидної трансформації тригонометричної «тканини» сюжету, зазвичай із залученням та актуалізацією як ключових теоретичних фактів, представлених у чинних навчальних програмах, так і положень, що виходять за їх межі.

Отримані результати сприяють оновленню компетентнісного середовища професійно орієнтованої математичної освіти, підвищенню якості підготовки майбутніх учителів математики з математичних і методичних дисциплін, а також посиленню розвивального компонента підвищення кваліфікації вчителів.

¹ кандидат фізико-математичних наук, доцент, заслужений вчитель України, доцент кафедри методики викладання і змісту освіти Комунального закладу вищої освіти «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради», <https://orcid.org/0000-0002-9817-6690>.

Ключові слова: методика навчання математики, підвищення кваліфікації вчителів, профілізація старшої школи, генералізація знань, викладання тригонометрії в школі, застосування властивостей функцій, математично обдаровані учні, задачі підвищеної складності.

Trigonometric frameworks for the synchronisation of functional competencies based on mathematics olympiad problems

Annotation. The article continues the analysis of didactic and methodological strategies in the context of knowledge generalisation and the synchronisation of mathematical and subject-methodological competencies. The focus is on academic profiling through in-depth mathematics study and the preparation of gifted students for mathematics olympiads. The effectiveness of such synchronisation depends on the integration of subject-specific and didactic connections in the content areas of mathematics education – for high school students, teachers, future teachers, in-service training professionals, and university lecturers – both separately and in their multilevel interactions.

In profile high school, the conceptual importance of the content line *Functions* is increasingly emphasised. Solving equations, systems, and inequalities, as well as proving inequalities and addressing other types of problems, is increasingly interpreted not only through standard methods related to lines *Numbers and Expressions* and *Equations and Inequalities*, but also through functional properties. This shift broadens the interpretation of functional competencies, especially in advanced and olympiad-level problems, where identifying non-standard functional structures is essential.

Trigonometric content, with its operational-logical richness and concentrated functional nature, has traditionally served as a foundational didactic platform for heuristic and exploratory learning.

The aim of the article is to refine approaches to constructing convoluted *theory-problem* patterns in mathematical and subject-methodological competency thinking and to model a didactic complex based on diverse, multi-idea olympiad-type problems. In such problems, the functional nature is not stated directly but emerges through a non-obvious transformation of the trigonometric *texture* of the problem's narrative – often involving key theoretical concepts from both the official curriculum and beyond.

The findings contribute to the advancement of a competency-based environment of professionally oriented mathematics education, enhance the quality of pre-service mathematics teacher preparation in mathematical and methodological domains, and strengthen the developmental component of in-service teacher professional training.

Keywords: mathematics teaching methodology, professional teacher development, profiling of high school, knowledge generalisation, school trigonometry teaching methods, application of function properties, maths gifted students, advanced problems.

Вступ

Поглиблене вивчення математики в старшій школі як один з найважливіших напрямів її академічної профілізації, систематична робота з математично обдарованою молоддю, учасниками інтелектуальних змагань вимагають продуктивного поєднання

дидактичних принципів *фундаменталізації* та *професіоналізації* освіти в межах єдиного процесу *генералізації* знань – концентрації навчального матеріалу й дидактико-методичного ресурсу навколо ключових теоретичних розділів і системи навчання розв'язування задач [1]. Українські й зарубіжні вчені вказують на те, що творче засвоєння та інтерпретація математичних знань високого рівня складності є неможливими без такої динаміки «навчання-вчення», при якій «учні активно створюють розуміння впродовж того, як вони приймають усе більш суттєву участь у відтворенні сталих математичних практик» [2, с. 21]. Джерелом суб'єктивізації таких математичних практик виступає сучасний учитель математики, підготовка та післядипломна освіта якого в предметно-методичному сегменті **A2** структури компетентностей, передбачених Професійним стандартом «Вчитель закладу загальної середньої освіти», затвердженим наказом Міністерства освіти і науки України від 29 серпня 2024 року № 1225, повинна ґрунтуватись на інтеграції та синергії спеціалізованої математичної компетентності та методичної компетентності. Водночас синхронізація математичних компетентностей переважно вивчається в розрізі різних етапів математичної підготовки учнів, звужено інтерпретується через тематичну й операціонально-логічну наступність і цілісність навчання. І навіть коли розглядається синхронізація предметно-методичних компетентностей учителя, то здебільшого враховується базовий дидактико-методичний трек: навчання застосування добре відомої вчителю ідеї, для якої у педагога вже налаштована власна фахова компетентнісна система, і всі зусилля скеровано на побудову компетентнісних навичок учнів паралельно відповідним стійким домінуючим навичкам учителя в суб'єктно-об'єктній парадигмі. Але викладання на профільному (поглибленому) рівні, підготовка учнів до математичних олімпіад, турнірів і конкурсів доповнює взаємодію систем компетентностей учителя й учнів новим виміром: кожна оригінальна складна математична ідея (тип олімпіадних задач тощо) розгортається одночасно в розгалуженому компетентнісному середовищі вчителя й у більш лінеаризованій системі спеціалізованих математичних компетентностей учнів. Реалізується інший предметно-методичний сценарій – виникнення в математичному та методичному полі зору вчителя нової та/або «несподіваної» для нього ідеї (для прикладу, після ознайомлення із задачними матеріалами чергових математичних змагань високого рівня), яку оперативно потрібно експертно опрацювати та ввести в дієву практику його учнів. У такій ситуації вже слід говорити про суб'єктно-суб'єктний контекст синхронного розвитку систем компетентностей і вчителів, і учнів. Досвід показує, що під час роботи з переможцями математичних змагань така синхронізація може супроводжуватись математичним лідерством саме обдарованих школярів, і до цього вчитель має бути готовим. Другий сценарій вимагає нових підходів до розвитку мотиваційних, змістових і дійових складових предметно-методичних компетентностей в умовах системи підвищення кваліфікації вчителів – не лише під час традиційної курсової перепідготовки, а й заходів більш обмеженої тривалості (тренінгів, тематичних семінарів, дискусійних панелей тощо). У статті [3] відзначаються ризики порушення рівноваги між педагогічним та методичним попитом і пропозиціями під час розгортання складної математичної ідеї (наприклад, вивчення класу олімпіадних задач): неконтрольовано збільшуються обсяги залученого науково-теоретичного матеріалу та задачного контенту. Ми дотримуємось такого ставлення до синхронізації компетентностей в їхніх методологічних, процедурних, логічних, дослідницьких, технологічних компонентах, яким забезпечується перебіг певних етапів різних процесів у належному порядку розділеними потоками або ж – із залученням механізмів уникнення конкурентних перешкод та/або взаємного блокування – одночасно.

Складний процес підготовки майбутніх учителів математики в закладах вищої педагогічної освіти також не може залишатись поза виміром синхронізації

математичних і предметно-методичних компетентностей, генералізації знань і опанування функціоналу педагога Нової української школи, який викладатиме в учнів з високим рівнем освітніх запитів у сфері математики. Стратегії навчання студентів-математиків педагогічних університетів, спрямованого на формування таких професійних якостей, в яких відображаються спеціалізовані предметно-методичні компетентності в поєднанні з фундаментальною математичною підготовкою, аналізувались і уточнювались у роботах українських учених І. Акуленко, Д. Бобилева, А. Воєводи, Т. Годованюк, М. Ковтонюк, І. Лов'янової, О. Матяш, О. Мартиненко, Л. Михайленко, В. Моторіної, О. Чашечникової та ін. Деякі підходи до ефективної синхронізації системи підготовки майбутніх учителів математики та системи післядипломної педагогічної освіти розглядались О. Задоріною, І. Мітельманом, О. Папач [4].

Синхронізація спеціалізованих компетентностей має охоплювати все *освітньо-професійне середовище* вчителя / майбутнього вчителя математики. Його структура включає такі основні категорії учасників освітнього процесу: учні, учителі, фахівці системи післядипломної освіти, студенти, викладачі закладів вищої педагогічної освіти (доцільно розрізнити ролі викладачів основних математичних курсів та викладачів методичних дисциплін). Результативність механізмів синхронізації залежить від предметних і дидактичних зв'язків у змістових лініях математичної освітньої галузі для кожної категорії окремо та у багаторівневій взаємодії між категоріями.

У старшій (профільній) школі на перший план виходить змістова лінія «Функції», значення й особливості якої з точки зору впровадження Державного стандарту профільної середньої освіти, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 25 липня 2024 року № 851, відзначає, зокрема, В. Швець [5]. У старшій школі розв'язування рівнянь і нерівностей, систем, доведення нерівностей, деякі інші типи задач більш помітно асоціюється не лише зі стандартними алгоритмами, правилами-орієнтирами, що виконуються суто в межах змістових ліній «Числа і вирази», «Рівняння і нерівності», але й з нестандартною інтерпретацією таких задач мовою властивостей функцій. Це дозволяє ставити питання про розширене тлумачення функціональних компетентностей, особливо – якщо йдеться про розв'язування задач підвищеної складності та задач математичних олімпіад, в яких ключовим є виділення нестандартної *функціональної структури (моделі)*, на що звертали увагу у своїх публікаціях Т. Колесник, О. Кукуш, В. Лейфура, В. Радченко, В. Ясінський та інші вітчизняні дослідники та педагоги-практики.

Тригонометрія є одним з найбільш забезпечених дидактико-методичною підтримкою розділів шкільного курсу алгебри. Сучасні особливості методики її викладання розглядали, зокрема, Т. Бондаренко, М. Ващенко, І. Гончаренко і Т. Рижко, Н. Борисова і В. Шаповалова, О. Карпенко, О. Смолярчук. Навчання тригонометрії в профільній школі, його спрямування на особистісний розвиток учнів висвітлюється в роботах Т. Грицик [6], В. Коберника [7], В. Роговського [8]. Тригонометричний матеріал в курсі профільного (поглибленого) вивчення математики визнається одним із системотвірних дидактичних ресурсних «майданчиків» для залучення обдарованих учнів до евристично-пізнавальної діяльності [9]. Чимало посібників зорієнтовані саме на диференційоване навчання тригонометрії [10–14]. Перед учнями стрімко розгортаються нові класи функцій, групи формул (тотожностей), величезний арсенал технічних прийомів, а також і типів олімпіадних задач [9; 15–17]. Утім, операційна перенасиченість і певна самодостатність тригонометрії за умов обмеження її систематичного поєднання з нестандартними та ускладненими проявами змістової лінії «Функції» та елементами математичного аналізу, як показує досвід, призводить до небажаного сприйняття тригонометрії в якості математичної та методичної

«резервації» не лише учнями та студентами, а й учителями. Відтак, виникає проблема синхронізації компетентностей шляхом конвергенції навчання перетворення тригонометричних виразів і навчання доведення нерівностей, розв'язування рівнянь і нерівностей, деяких інших типів задач високого рівня складності на основі їхньої функціональної сутності – виокремленні й дослідженні тих функцій, властивості яких визначають пошук розв'язань.

Синхронізація компетентностей учасників освітнього процесу в сфері педагогіки математики має спиратись на створення та апробацію нових і удосконалення існуючих дидактико-методичних інструментів у формі дидактичних комплексів-структур «теорія-задача», проєктів, кейсів як *робочих продуктів* у загальній методології *agile* (Manifesto for Agile Software Development, 2001, <http://agilemanifesto.org/>) [18].

Метою статті є розвинення методичних прийомів створення згорнутих структур мислення через моделювання прикладу дидактичного комплексу на основі *різнопланових* «виразних» задач олімпіадного рівня, в яких функціональна природа не є формальною, а розкривається лише після неочевидних кроків, пов'язаних із трансформацією заданої тригонометричної «тканини» сюжету, як правило – із залученням та актуалізацією важливих теоретичних фактів як представлених основним змістом навчальних програм, так і таких, що виходять за його межі. Задачі дидактичного комплексу на цьому етапі не повинні перевантажуватись ланцюжками громіздких технічних перетворень, що іноді можуть негативно позначатись на продуктивній сконцентрованості розумових дій саме на функціональних компетентностях учасників освітнього процесу. З точки зору багаторівневої синхронізації функціональних компетентностей нам потрібен *робочий продукт*, здатний регулювати спільний математичний і предметно-методичний ресурс учнів, учителів, студентів-математиків, викладачів закладів вищої та післядипломної освіти, доцільний для використання також у форматі підвищення кваліфікації.

Результати

Ми розглядаємо навчальні предметно-методичні блоки нестандартних задач підвищеної складності та олімпіадних задач різної тематики й типології, супроводжених спеціальним чином вибудованими теоретичними положеннями, як один із основних дієвих інструментів реалізації принципів генералізації змісту освіти для синхронізації компетентностей, позаяк робота з обдарованими учнями, готовність до неї сучасного вчителя / майбутнього вчителя математики є одним із критичних секторів компетентнісного простору [3; 18; 19]. У дослідженнях С. Семенця [20; 21] обґрунтовано важливі принципи розвивальної наступності (за якими кожен наступний тип задач характеризується більш високим рівнем змістового теоретичного узагальнення), формувальну задачну природу цілісності навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей. Погоджуємось з висновками [20; 21] про створення зон найближчого математичного розвитку учнів (базової, навчальної, навчально-теоретичної і навчально-дослідницької) в умовах обов'язкового співробітництва вчителя та учнів. Але перенесення цих принципів і висновків на рівень синхронізації компетентнісних систем різних категорій учасників освітнього процесу в контексті навчання студентів-математиків, підвищення кваліфікації вчителів, роботи з обдарованими учнями (які вивчають математику поглиблено, готуються до математичних інтелектуальних змагань) потребує уточнень. А саме: синхронізація має стати генератором формування практично «однойменних» зон математичного й предметно-методичного розвитку вчителів / майбутніх учителів у навчальному / академічному, квазіпрофесійному (для студентів) чи *agile*-професійному (для вчителів), навчально-професійному, результуючому сегментах компетентнісних сфер студента та

працюючого вчителя [4; 22; 23]. Дидактико-методичні комплекси, які нас цікавлять, мають забезпечувати особливий рівень змістового наповнення зон розвитку, інтегрувати складні задачі, нові для учнів / студентів / учителів математичні поняття й теоретичні факти та/або нестандартні застосування добре відомих елементів теорії.

У розглянутих обставинах усвідомлення учнями, студентами, учителями закріплених позитивних освітніх результатів, очікуваного трансферу зони математичного (предметно-методичного) розвитку на зону актуального розвитку зі створенням нової інтелектуальної та фахової якості (коли учень / студент / учитель спроможний упевнено застосувати розібрану ідею в новій проблемній ситуації) не реалізується через класичні індикатори – завдання для закріплення (хоча частково це може давати відчутний ефект). Розвивальна наступність не буде тут розумітись традиційно, адже кожна задача в дидактичному комплексі виконує практично унікальну роль. Проте ми все ж таки намагаємось максимально слідувати ідеології розвивальної наступності в форматі *коротких релізів*, який добре себе зарекомендував у методології *agile*.

Вважаємо, що базою методичних технологій в даній сфері є *інтрасуб'єктний* та *інтерсуб'єктний діалоги* (обмін ідеями, гіпотезами, проміжними результатами, самостійно здобутими додатковими знаннями, узагальненнями тощо) в умовах когнітивного комфорту, тобто можна говорити про залучення елементів педагогічного скаффолдингу [24], а результативність визначатиметься передусім на емпіричному та експертному рівні (до якого варто віднести і аналіз виступів учнів, студентів на олімпіадах).

Ми використовуємо засоби науково-методологічного аналізу навчально-методичних і наукових джерел, задачних матеріалів авторитетних математичних змагань, синтезу засадничих теоретичних принципів і практичних висновків. Важливе місце посідає узагальнення науково-педагогічного досвіду підготовки учнів і студентів, проведення занять на курсах підвищення кваліфікації, на науково-практичних семінарах, тренінгах, консультаціях з проблем науково-методичного супроводу математичних олімпіад, створення завдань для проведення олімпіад високого рівня.

Якість створених дидактичних робочих продуктів слід оцінювати, ураховуючи компактність (що є важливим для організації занять), охоплення дидактико-методичним комплексом запланованої номенклатури тем, мультиідейність кожної із задач, їх засвоюваність у тому середовищі, для якого комплекс призначено.

Запропонований тематичний задачний комплекс на основі тригонометричних сюжетів олімпіадного характеру й доволі широкого кола властивостей функцій розрахований також і на застосування в процесі викладання нормативних математичних курсів у педагогічних університетах: усі задачі можуть слугувати прикладами адаптації деяких теоретичних фактів університетської програми для перспектив роботи студентів-математиків з обдарованими учнями, пропедевтика якої, на нашу думку, має бути обов'язковою. З цієї позиції звертаємо увагу й на його придатність для повторення вибраних питань університетського курсу з учителями, які підвищують кваліфікацію (слід зазначити, що подібні аспекти післядипломної освіти сьогодні, на жаль, не знаходять належного втілення).

Задача 1 (Фестиваль юних математиків, м. Одеса, 1998 р.). Доведіть, що не існує такої функції $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(\sin x) = \sin kx$, де $k \neq 0$ – парне ціле число.

Розв'язання. Обговорення з учнями умови задачі (області визначення функції f) уже передбачає певне звернення до властивостей функції $y = \sin x$.

Позначимо $k = 2m$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, і покладемо $x = \frac{\pi}{2} - t$. Тоді для всіх $t \in \mathbb{R}$ матимемо: $f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \sin(\pi t - 2mt)$, $f(\cos t) = (-1)^{m+1} \sin 2mt$. Але це неможливо, адже в лівій частині парна функція, а в правій – не рівна тотожно нулеві непарна функція. ■

Задача 2. Знайдіть усі дійсні значення параметра a , для яких рівняння $\sin(x + 4a) + \sin \frac{x^2 - 6x - 7a}{2} = -x^2 + 4x - a$ не має дійсних розв'язків.

Розв'язання. Структуру рівняння породжено тотожним співвідношенням між виразами, що фігурують у рівнянні, а саме: $-x^2 + 4x - a = -2(x + 4a) - (x^2 - 6x - 7a)$. Тоді для $f(t) = 2t + \sin t$ маємо рівняння $f\left(\frac{x^2 - 6x - 7a}{2}\right) = f(-x - 4a)$, рівносильне квадратному рівнянню $x^2 - 4x + a = 0$ (ми скористались тим, що $f'(t) = 2 + \cos t > 0$, $t \in \mathbb{R}$, і функція f строго зростає на всій числовій прямій).

Відповідь: $a > 4$. ■

Задача 3 (Фестиваль юних математиків, м. Одеса, 1998 р.). Знайдіть усі дійсні значення параметра a , для яких рівняння $\cos 2ax - \sin ax^2 = \frac{3}{2}\pi + ax^2 - 2ax$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання. Тригонометричні формули зведення дозволяють залишити в запису рівняння лише одну тригонометричну функцію, надавши рівнянню вигляд $\left(2ax - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2ax - \frac{\pi}{2}\right) = (\pi + ax^2) - \sin(\pi + ax^2)$ (3.1). При цьому ми досягаємо й виділення функціональної моделі задачі: $f\left(2ax - \frac{\pi}{2}\right) = f(\pi + ax^2)$, де $f(t) = t - \sin t$. Функція f строго зростає на всій числовій прямій, оскільки $f'(t) = 1 - \cos t \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, причому $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ [25, Ч. 1, с. 133–134]. Отже, рівняння (3.1) є рівносильним рівнянню $2ax - \frac{\pi}{2} = \pi + ax^2$. Очевидно, що $a = 0$ умову задачі не задовольняє, і залишається прирівняти до нуля дискримінант квадратного рівняння $ax^2 - 2ax + \frac{3\pi}{2} = 0$.

Відповідь: $a = \frac{3\pi}{2}$. ■

Задача 4. Розв'яжіть рівняння $20\sin x + 3\sin 5x = 20\cos x + 3\cos 5x$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = 20\sin x + 3\sin 5x$. Тоді рівняння набуде вигляду $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (4.1), яким доставляється функціональна модель задачі. Зауважимо спочатку, що $x = \frac{\pi}{2} + \pi t$, $t \in \mathbb{Z}$, не є розв'язками рівняння. Періодичність функції f дозволяє розглядати лише $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. Для функції f виконується тотожність $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \equiv f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ (пряма $x = \frac{\pi}{2}$ є однією із осей симетрії графіка функції f). Неважко перевірити, що якщо $\lambda \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ є розв'язком, то й $\lambda + \pi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ також є розв'язком, а якщо $\xi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ є розв'язком, то й $\xi - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ – розв'язок. Це означає, що слід знайти всі розв'язки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а потім «розтиражувати» їх додаванням πn , $n \in \mathbb{Z}$. Зазначимо, що $x = 0$ розв'язком рівняння не буде. На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція f строго зростає, позаяк $f'(x) = 5\cos x(48\cos^4 x - 60\cos^2 x + 19) > 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\pi}{2} - x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, і рівність (4.1) дає для таких x , що $x = \frac{\pi}{2} - x$, $x = \frac{\pi}{4}$. Якщо ж $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\frac{\pi}{2} + x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, і оскільки $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, то $x = \frac{\pi}{2} + x$, що неможливо.

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

Задача 5 (Всеукраїнська математична олімпіада, IV етап, 2002 р.). Для $0 \leq x, y, z < \frac{\pi}{2}$ розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x + \sin y + \sin z = 3x, \\ \sin x + \operatorname{tg}y + \sin z = 3y, \text{ (5.1)} \\ \sin x + \sin y + \operatorname{tg}x = 3z. \end{cases}$$

Розв'язання. Доведемо, що розв'язок $x = 0, y = 0, z = 0$ буде єдиним, що задовольняє умову. Функціональна модель задачі виникає, якщо отримати *наслідок* системи (5.1) – рівність $(-3x + 2\sin x + \operatorname{tg}x) + (-3y + 2\sin y + \operatorname{tg}y) + (-3z + 2\sin z + \operatorname{tg}z) = 0$ (5.2). Розглянемо на проміжку $[0; \frac{\pi}{2})$ функцію $f(t) = -3t + \operatorname{tg}t + 2\sin t$. Маємо, що $f(0) = 0$, причому на проміжку $[0; \frac{\pi}{2})$ функція f є неперервною й строго зростає, адже $f'(t) = \frac{1+2\cos^3 t - 3\cos^2 t}{\cos^2 t} > 0$ для $0 < t < \frac{\pi}{2}$, бо за нерівністю Коші виконується нерівність $1 + \cos^3 x + \cos^3 x > 3\cos^2 t, t \in (0; \frac{\pi}{2})$. Відтак, для $0 \leq x, y, z < \frac{\pi}{2}$ рівність (5.2) виконується лише за умови $x = y = z = 0$.

Відповідь: $x = 0, y = 0, z = 0$. ■

Задача 6. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \cos y + 2\cos(x+y)\cos x = 0, \\ \cos z + 2\cos(y+z)\cos y = 0, \\ \cos x + 2\cos(z+x)\cos z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Функціональний зміст задачі є неочевидним. Якщо принаймні одне з чисел $\cos x, \cos y, \cos z$ дорівнює нулю, то $\cos x = \cos y = \cos z = 0$, і $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, y = \frac{\pi}{2} + \pi \ell, z = \frac{\pi}{2} + \pi m$ для цілих k, ℓ, m дають розв'язки системи. Нехай далі $\cos x \neq 0, \cos y \neq 0, \cos z \neq 0$. Припустимо, наприклад, що $\sin x = 0$. Тоді $\cos y + 2\cos^2 x \cos y = 0, 3\cos y = 0$, що неможливо. Числа x, y, z не можуть мати вигляду $\pi t, t \in \mathbb{Z}$.

Тепер ми можемо перейти до системи (див. також задачу С.7.52 у [26])

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x + 3\operatorname{ctg}x = 2\operatorname{tg}y, \\ \operatorname{tg}y + 3\operatorname{ctg}y = 2\operatorname{tg}z, \text{ (6.1)} \\ \operatorname{tg}z + 3\operatorname{ctg}z = 2\operatorname{tg}x. \end{cases}$$

Числа $\operatorname{tg}x, \operatorname{tg}y, \operatorname{tg}z$ повинні мати однаковий знак. Нехай усі вони додатні, то за нерівністю Коші $2\operatorname{tg}y = \operatorname{tg}x + 3\operatorname{ctg}x \geq 2\sqrt{3}, \operatorname{tg}y \geq \sqrt{3}$. Аналогічно доводиться, що $\operatorname{tg}x \geq \sqrt{3}, \operatorname{tg}z \geq \sqrt{3}$. Тому $3\operatorname{ctg}x = \frac{3}{\operatorname{tg}x} \leq \sqrt{3} \leq \operatorname{tg}x, 2\operatorname{tg}y = \operatorname{tg}x + 3\operatorname{ctg}x \leq \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}x = 2\operatorname{tg}x, \operatorname{tg}y \leq \operatorname{tg}x$. Так само встановлюється, що $\operatorname{tg}z \leq \operatorname{tg}y, \operatorname{tg}x \leq \operatorname{tg}z$. Отже, $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}y = \operatorname{tg}z$. Із системи знаходимо, що $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}y = \operatorname{tg}z = \sqrt{3}$. Якщо числа $\operatorname{tg}x, \operatorname{tg}y, \operatorname{tg}z$ усі від'ємні, то аналогічними міркуваннями ми дістанемо рівності $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}y = \operatorname{tg}z = -\sqrt{3}$. Зазначимо, що робити перевірку тут не потрібно.

Утім, систему (6.1) можна інтерпретувати й по-іншому. Для функції $f(t) = \frac{t}{2} + \frac{3}{2t}$ після очевидних підстановок запишемо систему (6.1) у вигляді

$$\begin{cases} f(u) = v, \\ f(v) = w, \text{ (6.2)} \\ f(w) = u. \end{cases}$$

Числа u, v, w є числами одного знака. Через непарність функції f можна обмежитись випадком, коли всі вони додатні. Якщо $t = t_0$ – нерухома точка функції f , тобто $f(t_0) = t_0$, то $u = t_0, v = t_0, w = t_0$ є розв'язком системи (6.2). Покажемо, що в нашій ситуації інших розв'язків система не має. Шукані додатні u, v, w з необхідністю є нерухомими точками функції $\varphi(t) = f(f(f(t)))$ – третьої ітерації функції f .

Розв'яжемо рівняння $\varphi(t) = t, t > 0$. Єдиним додатним коренем рівняння $f(t) = t \in t_0 = \sqrt{3}$, причому функція f строго зростає на проміжку $[\sqrt{3}; +\infty)$, а на проміжку $(0; \sqrt{3}]$ строго спадає.

Ми скористаємось таким фактом у зручній для нас інтерпретації [27].

Теорема. Нехай $n \geq 2$ – задане натуральне число. Якщо функція $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ зростає (не обов'язково строго) на непорожній множині $X \subset \mathbb{R}$, то для $x_0 \in X$ рівність $f^{(n)}(x_0) = x_0$ виконується тоді й тільки тоді, коли виконується рівність $f(x_0) = x_0$. (Для ітерацій числової функції f зручно використовувати спеціальні позначення: $f^{(n)}(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_{n \text{ разів}}, n \geq 2; f^{(1)}(x) = f(x)$.)

З теореми випливає, що на проміжку $[\sqrt{3}; +\infty)$ рівняння $\varphi(t) = t$ має єдиний корінь $t_0 = \sqrt{3}$ – нерухому точку функції f .

Нехай $0 < t < \sqrt{3}$. Тоді $f(t) > f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, $f(f(t)) > f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, $f(f(f(t))) > f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} > t$, і тому на інтервалі $(0; \sqrt{3})$ функція φ не має нерухомих точок.

Для від'ємних u, v, w маємо $u = v = w = -\sqrt{3}$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, y = \frac{\pi}{2} + \pi \ell, z = \frac{\pi}{2} + \pi m; x = \frac{\pi}{3} + \pi k, y = \frac{\pi}{3} + \pi \ell, z = \frac{\pi}{3} + \pi m; x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, y = -\frac{\pi}{3} + \pi \ell, z = -\frac{\pi}{3} + \pi m$ (k, ℓ, m – довільні цілі числа). ■

Задача 7 (Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2002 р.). Знайдіть усі такі $x \in \mathbb{R}$, що $\operatorname{tg} x < \operatorname{tg}(x + 1) < \operatorname{tg}(x + 2) < \operatorname{tg}(x + 3)$. **(7.1)**

Розв'язання. Ураховуючи π -періодичність функції $f(t) = \operatorname{tgt}$, достатньо обмежитись $x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$, $x \neq \frac{3\pi}{2} - 3, x \neq \frac{3\pi}{2} - 2, x \neq \frac{3\pi}{2} - 1$. Помітимо, що для $x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} - 3)$ умова (7.1) справджується, оскільки $\frac{\pi}{2} < x < x + 1 < x + 2 < x + 3 < \frac{3\pi}{2}$, а на інтервалі $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$ функція $f(t) = \operatorname{tgt}$ строго зростає. Водночас, для $\frac{3\pi}{2} - 3 < x < \frac{3\pi}{2}$ маємо: $\frac{3\pi}{2} < x + 3 < \frac{3\pi}{2} + 3 < \frac{3\pi}{2} + \pi, \cos(x + 3) > 0, \cos x < 0, \operatorname{tg}(x + 3) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin 3}{\cos(x+3)\cos x} < 0$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{3\pi}{2} - 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. ■

Задача 8 (Олімпіада «Турнір чемпіонів», м. Вінниця, 2015 р.). Розв'яжіть рівняння $\cos 3x + 39 \cos x = 32x^3 + 48x^2 + 96x + 40$. **(8.1)**

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса потрійного кута, рівняння (8.1) запишемо у вигляді $\cos^3 x + 9 \cos x = (2x + 1)^3 + 9(2x + 1)$ **(8.2)**. Ми бачимо, що функціональна структура задачі визначається строго зростаючою на всій числовій прямій функцією $f(t) = t^3 + 9t$. Рівняння (8.2) є рівносильним рівнянню $\cos x = 2x + 1$ **(8.3)**. Функція $\varphi(t) = \cos x - 2x - 1$ строго спадає на всій числовій прямій, бо $\varphi'(t) = -\sin t - 2 < 0, t \in \mathbb{R}$. Оскільки $\varphi(0) = 0$, то $x = 0$ – єдиний розв'язок рівняння (8.3).

Відповідь: $x = 0$. ■

Задача 9 (VI Соросівська олімпіада школярів України, 2000 р.). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x = 2y\sqrt{x^2 - 2x - y} + 1, \\ x^2 + \arcsin y = y^2 + \arcsin x. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо неперервну на відрізку $[-1; 1]$ функцію $f(t) = t^2 - \arcsin t$, для якої $f'(t) = 2t - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, t \in (-1; 1)$. Подавши $t \in (-1; 1)$ як $t = \sin \alpha, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, маємо: $2t - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2t\sqrt{1-t^2}-1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha-1}{\cos\alpha} \leq 0$. Функція f строго спадає на відрізку $[-1; 1]$ (ми врахували, що рівняння $f'(t) = 0$ має єдиний корінь $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Звідки

впливає, що, з необхідністю, $x = y$. Залишається на відрізку $[-1; 1]$ розв'язати рівняння $2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 3x} + 1 \Leftrightarrow (x - \sqrt{x^2 - 3x})^2 = 1$.

Відповідь: $x = -\frac{1}{5}, y = -\frac{1}{5}$. ■

Задачі на застосування теореми Ролля, теорем Лагранжа і Коші про середні значення є важливим інструментом розвитку функціональної компетентності та компетентностей в сфері основ математичного аналізу під час поглибленого вивчення математики, роботи з учителями, студентами математичних спеціальностей тощо. Отримання твердження задачі частіше за все вимагає неабиякої ерудиції та математичної «фантазії» задля підбору функції з потрібними властивостями [28]. Розглянемо показовий приклад з неочевидним тригонометричним змістом: доволі нестандартна конструкція вдало поєднується з нескладною технічною реалізацією.

Задача 10 (Фестиваль юних математиків, м. Одеса, 1999 р.). Нехай функція f є неперервною на сегменті $[0; 1]$ і має похідну в кожній точці інтервалу $(0; 1)$, причому $f(1) - f(0) = \frac{\pi}{4}$. Доведіть, що існує таке число $a \in (0; 1)$, що $1 - a^2 < f'(a) < 1 - a^2 + a^4$.

Розв'язання. Позначимо $F(x) = \arctg x - f(x)$, $x \in [0; 1]$. Оскільки $F(1) = \arctg 1 - f(1) = \frac{\pi}{4} - f(1)$, $F(0) = \arctg 0 - f(0) = -f(0)$, $F(1) - F(0) = \frac{\pi}{4} - (f(1) - f(0)) = 0$, то до функції F можна застосувати теорему Ролля: для деякого $a \in (0; 1)$ $F'(a) = 0$, тобто $f'(a) = \frac{1}{1+a^2}$. Залишається зауважити, що для $a \in (0; 1)$ $1 - a^2 < \frac{1}{1+a^2} < 1 - a^2 + a^4$. ■

Наступна задача характеризує високий творчий рівень підготовки обдарованих учнів з роглядуваних питань. Ця задача, як і задача 1, має ознаки сюжетних ліній функціональних рівнянь та/або нерівностей.

Задача 11 (Всеукраїнська математична олімпіада, III етап, 1999 р.). Доведіть, що не існує диференційовної на всій числовій прямій функції f такої, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $f(x) \geq f(x + \sin x)$ і рівняння $f'(x) = 0$ має лише скінченну кількість розв'язків.

Розв'язання. Розглянемо функцію $F(x) = f(x) - f(x + \sin x)$, $x \in \mathbb{R}$. За умовою задачі $F(x) \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Для всіх цілих n ми маємо $F(\pi n) = 0$. За теоремою Ферма (необхідною умовою екстремуму) $F'(\pi n) = 0$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$. Отже, $f'(\pi n) - (1 + \cos \pi n)f'(\pi n) = 0$, і тому $f'(\pi n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, що суперечить умові задачі. ■

Розберемо ще приклад, пов'язаний із основами аналізу.

Задача 12. Нехай функція f диференційовна на всій числовій прямій і не є тотожно рівною нулю. Доведіть, що принаймні одна з нерівностей $f(x) \sin x > 0$, $f'(x) \cos x < 0$ має розв'язки.

Розв'язання. Припустимо супротивне: для всіх $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \sin x \leq 0$ і $f'(x) \cos x \geq 0$. Звідси $(f(x) \cos x)' \geq 0$, і тому функція $F(x) = f(x) \cos x$ є неспадною на всій числовій прямій. Але оскільки $F\left(\frac{\pi}{2} + \pi t\right) = 0$ для всіх цілих t , то $F(x) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Якщо існує таке x_0 , що $f(x_0) \neq 0$, то, ураховуючи неперервність диференційовної функції f , знайдеться деякий окіл точки x_0 , в якому значення $f(x)$ мають такий самий знак, як і $f(x_0)$. Але це неможливо, позаяк у цьому околі функція F не зможе набувати лише нульових значень. ■

Задача 13 (V Соросівська олімпіада школярів України, 1998 р.). Про дійсні числа x , y і z відомо, що $x + y + z = 0$. Доведіть, що $\arctg x \cdot \arctg y + \arctg y \cdot \arctg z + \arctg z \cdot \arctg x \leq 0$.

Розв'язання. У даній задачі реалізується не специфіка оберненої тригонометричної функції \arctg , а лише її непарність та зростання. Отже, доведемо потрібний факт у загальній формі – для зростаючої (не обов'язково строго) на всій

числовій прямій непарної функції f : нерівність $f(x)f(y) + f(y)f(z) + f(z)f(x) \leq 0$ (13.1) за умови $x + y + z = 0$ й буде функціональною моделлю задачі.

Серед трьох чисел принаймні два належать або проміжку $[0; +\infty)$, або ж проміжку $(-\infty; 0]$. Через непарність функції f , симетричність умови $x + y + z = 0$ та нерівності (13.1) можемо вважати, що $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq 0$. Далі, $z = -(x + y)$, $f(z) = -f(x + y)$, і нерівність (13.1) набуде вигляду $f(x)f(y) \leq f(x + y)f(x) + f(x + y)f(y)$. Насамкінець візьмемо до уваги, що для неспадної непарної функції f та невід'ємних x і y справджуються нерівності $f(x) \geq 0$, $f(y + x) \geq f(y) \geq 0$. ■

Змістовним об'єктом для учнів, які опановують математику поглиблено та орієнтуються на майбутню професійну діяльність у галузі математики, є *тригонометричні многочлени n -го порядку* – вирази вигляду $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ (доречно надалі вважати, що $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$, хоча на подальші міркування це не впливає). Тригонометричні многочлени пов'язані з вивченням важливих питань курсу математичного аналізу та інших розділів вищої математики.

Звернемо увагу на досить відому задачу.

Задача 14. Нехай $g(x) = 1 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$ – такий тригонометричний многочлен 2-го порядку, що $g(x) \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Доведіть, що $g(x) \leq 3$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Тригонометричні многочлени, що набувають лише невід'ємних значень, називають *невід'ємними*. В основі суто «шкільного» розв'язання, знайти яке складно, лежать, на перший погляд, штучні тригонометричні тотожності, котрі неважко перевірити безпосередньо:

$$\begin{aligned} \sin t + \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(t + \frac{4\pi}{3}\right) &= 0, \\ \cos t + \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(t + \frac{4\pi}{3}\right) &= 0, \\ \sin t + \sin\left(t + \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(t + \frac{8\pi}{3}\right) &= 0, \\ \cos t + \cos\left(t + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(t + \frac{8\pi}{3}\right) &= 0, \end{aligned}$$

Звідки знаходимо, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ $g(x) + g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + g\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 3$, і з урахуванням нерівності $g(x) \geq 0$, ми й одержимо бажаний результат. ■

Знайомство з елементами теорії комплексних чисел, яку традиційно вивчають у математичних класах, на гуртках і факультативах, висвітлює практично очевидне походження наведених тригонометричних тотожностей. Насправді, розглянемо комплексні числа в тригонометричній формі $\omega_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ та $\omega_2 = \omega_1^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$, які є кубічними коренями з одиниці. Нагадаємо, що для будь-якого кореня $\omega \neq 1$ степеня $n + 1$ з одиниці виконується рівність $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^n = 0$ (це впливає з рівності $\omega^{n+1} - 1 = (\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^n)$). Відтак, для комплексного числа $z = \cos t + i \sin t$ за допомогою формули Муавра матимемо співвідношення $z + z\omega_1 + z\omega_1^2 = 0$, $z + z\omega_2 + z\omega_2^2 = 0$, розділяючи в яких дійсну й уявну частини отримаємо наведені вище тригонометричні тотожності.

Використання комплексних чисел дозволяє розглянути класичне узагальнення цієї властивості невід'ємного тригонометричного многочлена з вільним членом, рівним одиниці (більш ґрунтовно – з різними підходами до доведень – це важливе теоретичне питання подається в [29, розд. VI]; до цього джерела можна звернутись з найбільш підготовленими учнями під час підготовки до конкурсів Малої академії наук). Ми тут залишимося у межах розібраного вище розв'язання з використанням елементарної теорії комплексних чисел, доступної школярам.

Для тригонометричного многочлена n -го порядку $g(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ (який записується також у вигляді $\sum_{k=0}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$) легко встановити, що $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx$. Якщо $g(x)$ – невід’ємний тригонометричний многочлен, то $a_0 \geq 0$. Якщо у невід’ємному тригонометричному многочлені $a_0 = 0$, то він буде тотожно дорівнювати нулю (насправді, у протилежному випадку на деякому відрізку $[\alpha; \beta] \subset [0; 2\pi]$ $m = \min_{x \in [\alpha; \beta]} g(x) > 0$, і тоді $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx \geq \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta g(x) dx \geq m > 0$). З цього ми робимо висновок, що невід’ємні тригонометричні многочлени, відмінні від тотожного нуля, зручно відразу розглядати з одиничним вільним членом, тобто у вигляді $g(x) = 1 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

Візьмемо комплексні корені степеня $n + 1$ з одиниці: $\omega_k = \cos \frac{2\pi k}{n+1} + i \sin \frac{2\pi k}{n+1}$, $1 \leq k \leq n$. Тоді для всіх k , $1 \leq k \leq n$, $\sum_{m=0}^n \omega_k^m = 0$, $\sum_{m=0}^n \left(\cos \frac{2\pi km}{n+1} + i \sin \frac{2\pi km}{n+1} \right) = 0$. Для комплексного числа $z = \cos t + i \sin t$ маємо тоді, що

$$\sum_{m=0}^n \left(\cos \left(t + \frac{2\pi km}{n+1} \right) + i \sin \left(t + \frac{2\pi km}{n+1} \right) \right) = 0,$$

$$\sum_{m=0}^n \cos \left(t + \frac{2\pi km}{n+1} \right) = 0, \sum_{m=0}^n \sin \left(t + \frac{2\pi km}{n+1} \right) = 0.$$

Покажемо, перетворюючи відповідні суми з використанням цих тотожностей (які, до речі, можна довести багатьма іншими способами), що для всіх дійсних x має місце рівність $\sum_{m=0}^n g \left(x + \frac{2\pi m}{n+1} \right) = n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n g \left(x + \frac{2\pi m}{n+1} \right) &= \sum_{m=0}^n \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k \cos \left(kx + \frac{2\pi mk}{n+1} \right) + b_k \sin \left(kx + \frac{2\pi mk}{n+1} \right) \right) = n + 1 + \\ &\sum_{m=0}^n \sum_{k=1}^n a_k \cos \left(kx + \frac{2\pi mk}{n+1} \right) + b_k \sin \left(kx + \frac{2\pi mk}{n+1} \right) = n + 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^n a_k \cos \left(kx + \frac{2\pi km}{n+1} \right) + \\ &b_k \sin \left(kx + \frac{2\pi km}{n+1} \right) = n + 1 + \sum_{k=1}^n a_k \sum_{m=0}^n \cos \left(kx + \frac{2\pi km}{n+1} \right) + \\ &\sum_{k=1}^n b_k \sum_{m=0}^n \sin \left(kx + \frac{2\pi km}{n+1} \right) = n + 1. \end{aligned}$$

І тепер ми отримали, що для невід’ємного тригонометричного многочлена n -го порядку $g(x) = 1 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ виконується нерівність $g(x) \leq n + 1$, $x \in \mathbb{R}$, і оскільки функція g є неперервною 2π -періодичною функцією, то існує $M = \max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \max_{x \in [0; 2\pi]} g(x)$, і $M \leq n + 1$.

Корисно розібрати питання непокрашуваності оцінки – існування невід’ємного тригонометричного многочлена $g(x)$ n -го порядку з вільним членом, рівним одиниці, який набуває значення $n + 1$ (тоді $\max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \max_{x \in [0; 2\pi]} g(x) = n + 1$).

Для $z = \cos t + i \sin t$, $|z| = 1$, позначимо $\varphi(t) = \frac{1}{n+1} |1 + z + z^2 + \dots + z^n|^2$. Маємо, що $\varphi(0) = n + 1$, $\varphi(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Доведемо, що $\varphi(t)$ – тригонометричний многочлен n -го порядку з одиничним вільним членом. Оскільки для комплексного числа w виконується рівність $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$, то

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{n+1} (1 + z + z^2 + \dots + z^n)(1 + \bar{z} + \bar{z}^2 + \dots + \bar{z}^n) = \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq k, m \leq n} z^k \bar{z}^m = \\ &\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n z^k \bar{z}^k + \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq k \neq m \leq n} z^k \bar{z}^m = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq k \neq m \leq n} (\cos kt + i \sin kt)(\cos mt - \\ &i \sin mt) = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq k \neq m \leq n} (\cos kt \cos mt + \sin kt \sin mt) - \frac{1}{n+1} i \sum_{0 \leq k \neq m \leq n} \cos kt \sin mt + \\ &\frac{1}{n+1} i \sum_{0 \leq k \neq m \leq n} \cos mt \sin kt = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq k \neq m \leq n} \cos(m - k)t = \\ &1 + \frac{2}{n+1} \sum_{0 \leq k < m \leq n} \cos(m - k)t. \end{aligned}$$

Ціле число ℓ , $1 \leq \ell \leq n$, можна подати у вигляді $\ell = m - k$, де для цілих k і m $0 \leq k < m \leq n$, рівно $n + 1 - \ell$ способами. Звідки $\varphi(t) = 1 + \frac{2}{n+1} \sum_{\ell=1}^n (n + 1 - \ell) \cos \ell t$, що й було потрібно довести.

Аналогчними міркуваннями встановлюється більш загальний відомий факт. Якщо $h(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z + c_0$ – многочлен з комплексними коефіцієнтами, $c_0 \neq 0$, $c_n \neq 0$, то для $z = \cos t + i \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = |h(z)|^2$ є невід’ємним тригонометричним многочленом n -го порядку $\sum_{k=0}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$, в якому $a_k = 2\Re \sum_{m=0}^{n-k} c_m \bar{c}_{m+k}$, $b_k = 2\Im \sum_{m=0}^{n-k} c_m \bar{c}_{m+k}$, $0 \leq k \leq n$. У [29, розд. VI] доводиться і обернене твердження: для будь-якого невід’ємного тригонометричного многочлена n -го порядку $g(t) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kt + b_k \sin kt$, $a_0 > 0$, існує (не обов’язково єдиний) многочлен n -го степеня $h(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z + c_0$ з комплексними коефіцієнтами такий, що $g(t) = |h(\cos t + i \sin t)|^2$ для всіх $t \in \mathbb{R}$; при цьому якщо $b_k = 0$, $0 \leq k \leq n$, то таке представлення можна отримати з многочленом n -го степеня $h(z)$ з дійсними коефіцієнтами.

Наприкінці розглянемо ще один сюжет тригонометричного характеру, який потрапляв з наукових досліджень до задачних матеріалів олімпіад високого рівня. Спочатку наведемо нескладне твердження, практично очевидне з наочних міркувань, але з методично доцільним доведенням.

Лема. Нехай функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, причому $f(a) = f(b) = 0$. Якщо для деякого $\zeta \in (a; b)$ $f(\zeta) \leq 0$, то існує таке $x_0 \in (a; b)$, що $\min_{x \in [a; b]} f(x) = f(x_0) \leq 0$.

Доведення. Якщо для якогось $u \in (a; b)$ $f(u) = 0$, і при цьому на відрізку $[a; b]$ $f(x) \geq 0$, то $f(u) = \min_{x \in [a; b]} f(x) = 0$. А якщо для якогось $u \in (a; b)$ $f(u) < 0$, то існує $\min_{x \in [a; b]} f(x) < 0 = f(0) = f(\pi)$, котрий досягається в деякій точці $v \in (a; b)$: $\min_{x \in [a; b]} f(x) = f(v) \leq f(u) < 0$. ■

Задача 15 (Ліпот Фейєр / Lipót Fejér, 1880–1959, угорський математик). Нехай $n \geq 2$ – натуральне число. Доведіть, що для всіх $x \in (0; \pi)$ справджується нерівність $\sum_{m=1}^n \frac{\sin mx}{m} > 0$.

Розв’язання. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 2$ перевіримо базу індукції: $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x = \sin x(1 + \cos x) > 0$, $x \in (0; \pi)$. Позначимо $\mathcal{S}_k(x) = \sum_{m=1}^k \frac{\sin mx}{m}$. За припущенням індукції $\mathcal{S}_k(x) > 0$ для всіх $x \in (0; \pi)$. Покажемо, що $\mathcal{S}_{k+1}(x) = \mathcal{S}_k(x) + \frac{1}{k+1} \sin(k+1)x > 0$, $x \in (0; \pi)$. Припустимо, що це не так, і для деякого $\zeta \in (0; \pi)$ $\mathcal{S}_{k+1}(\zeta) \leq 0$. За доведеною лемою існує таке $x_0 \in (0; \pi)$, що $\min_{x \in [0; \pi]} \mathcal{S}_{k+1}(x) = \mathcal{S}_{k+1}(x_0) \leq 0$. За теоремою Ферма (необхідною умовою екстремуму) $\mathcal{S}'_{k+1}(x_0) = 0$, тобто

$$\sum_{m=1}^{k+1} \cos mx_0 = \frac{\sin(k+1+\frac{1}{2})x_0 - \sin\frac{x_0}{2}}{2\sin\frac{x_0}{2}} = 0.$$

Звідки $\sin\frac{x_0}{2} = \sin(k+1+\frac{1}{2})x_0$, $\cos\frac{x_0}{2} = |\cos(k+1+\frac{1}{2})x_0| \geq \cos(k+1+\frac{1}{2})x_0$, бо $0 < \frac{x_0}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Маємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{k+1}(x_0) - \mathcal{S}_k(x_0) &= \frac{1}{k+1} \sin(k+1)x_0 = \frac{1}{k+1} \sin\left(\left(k+1+\frac{1}{2}\right)x_0 - \frac{1}{2}x_0\right) = \frac{1}{k+1} \sin\left(\left(k+1+\frac{1}{2}\right)x_0\right) \cos\frac{x_0}{2} - \frac{1}{k+1} \cos\left(\left(k+1+\frac{1}{2}\right)x_0\right) \sin\frac{x_0}{2} \\ &= \frac{1}{k+1} \sin\frac{x_0}{2} \cos\frac{x_0}{2} - \frac{1}{k+1} \cos\left(\left(k+1+\frac{1}{2}\right)x_0\right) \sin\frac{x_0}{2} = \frac{1}{k+1} \sin\frac{x_0}{2} \left(\cos\frac{x_0}{2} - \cos\left(\left(k+1+\frac{1}{2}\right)x_0\right)\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Отже, $0 \geq \mathcal{S}_{k+1}(x_0) \geq \mathcal{S}_k(x_0)$, що суперечить припущенню індукції. І тому $\mathcal{S}_{k+1}(x) > 0$ для всіх $x \in (0; \pi)$. ■

Зауваження. Вираз $\mathcal{S}_n(x) = \sum_{m=1}^n \frac{\sin mx}{m}$, $x \in \mathbb{R}$, є частковою сумою збіжного на всій числовій прямій ряду $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m}$ (збіжність навіть є рівномірною на будь-якому відрізку, що не містить жодної точки вигляду $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Такий ряд є важливим прикладом ряду Фур'є [25, Ч. 2, гл. 16]. Відомо, що для визначеної на всій

числовій прямій 2π -періодичної функції h такої, що $h(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, $x \in (0; 2\pi)$, $h(0) = h(2\pi) = 0$, виконується рівність $h(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m}$, $x \in \mathbb{R}$. Поведінку часткових сум для різних значень n варто проілюструвати за допомогою онлайн-сервісу символічної комп'ютерної математики WolframAlpha (для $n = 20$ і $n = 75$ див. рис. 1 і рис. 2 відповідно).

З оцінкою часткових сум $\mathcal{S}_n(x) = \sum_{m=1}^n \frac{\sin mx}{m}$ пов'язана й наступна задача, зміст якої не виходить за межі усталених вимог до найкращих учнів математичних класів, учасників математичних олімпіад і турнірів. Розв'язання задачі, як і доведення нерівності Л. Фейєра, об'єднує цілу низку різнопланових прийомів з тригонометрії, алгебри, початків аналізу, що дозволяє лише на її основі сформулювати дидактико-методичний кейс, що охоплює як математично обдарованих учнів, студентів-математиків педагогічних університетів, так і вчителів, які обрали відповідний трек підвищення кваліфікації. Зокрема, додаткової актуалізації потребують такі факти.

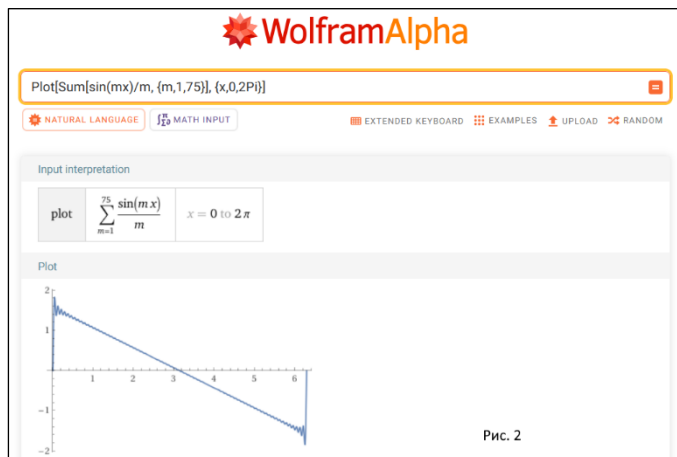
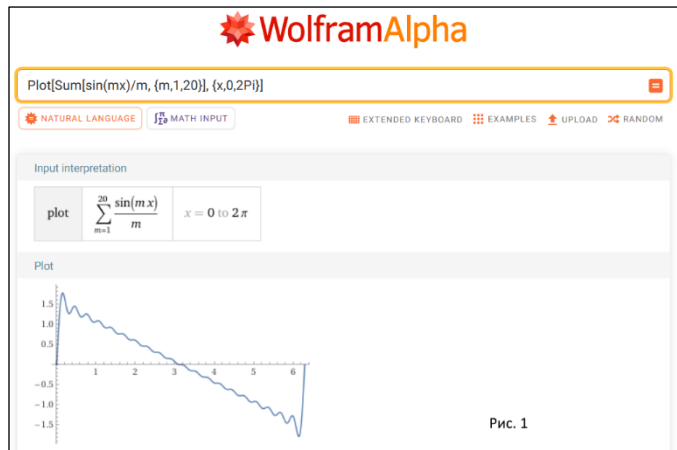
Нерівність Абеля (Нільс Генрік Абель / Niels Henrik Abel, 1802–1829, видатний норвезький математик). Нехай x_1, x_2, \dots, x_n , $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq 0$ – дійсні числа. Позначимо $\sigma_k = \sum_{i=1}^k x_i$, $1 \leq k \leq n$, $m = \min_{1 \leq k \leq n} \sigma_k$, $M = \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k$. Тоді $my_1 \leq x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \leq My_1$.

Нерівність Абеля доводиться нескладно: слід використати перетворення Абеля $\sum_{k=1}^n x_k y_k = \sigma_n y_n + \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (y_k - y_{k+1})$. Вона має численні красиві застосування в олімпіадних нерівностях [30, с. 335; 31, с. 15].

Лема [25, Ч. 1, с. 74]. Для всіх $t \in (0; \frac{\pi}{2})$ виконується подвійна нерівність $\sin t < t < \operatorname{tg} t$, при цьому нерівність $\sin t < t$ має місце для всіх $t > 0$.

Менш знайомим для учнів є такий факт.

Лема. Для всіх $t \in (0; \frac{\pi}{2})$ $\sin t > \frac{2}{\pi} t$.



Доведення. Геометричний зміст даної нерівності полягає в тому, що графік опуклої дуги на сегменті $[0; \frac{\pi}{2}]$ функції $y = \sin t$ на інтервалі $(0; \frac{\pi}{2})$ лежить вище за його хорду, що сполучає точки $(0; 0)$ та $(\frac{\pi}{2}; 1)$.

Наведемо й інше міркування, яке варто розібрати з учнями. Розглянемо неперервну (оскільки $\sin t \sim t, t \rightarrow 0$) функцію

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0, \end{cases}$$

яка на інтервалі $(0; \frac{\pi}{2})$ має від'ємну похідну $\Psi'(t) = \frac{t - \operatorname{tg} t}{t^2 \cos t}$, і тому строго спадає на проміжку $[0; \frac{\pi}{2}]$. Це дає нам, що $\Psi(t) > \Psi(\frac{\pi}{2}), \frac{\sin t}{t} > \frac{2}{\pi}, 0 < t < \frac{\pi}{2}$. ■

Задача 16 (див. також [32, с. 194]). Доведіть, що для будь-якого натурального n для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|\sum_{m=1}^n \frac{\sin mx}{m}| < 2\sqrt{\pi}$.

Розв'язання. Функція в лівій частині є π -періодичною, у точках $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ нерівність є очевидною, тому далі достатньо розглядати її на інтервалі $(0; \pi)$, де, враховуючи нерівність Фейєра, $|\sum_{m=1}^n \frac{\sin mx}{m}| = \sum_{m=1}^n \frac{\sin mx}{m}$. Позначимо $\ell = \lfloor \frac{\sqrt{\pi}}{x} \rfloor$. Спочатку вважаємо, що $0 < \ell < n$. Подамо останню суму у вигляді $\sum_{m=1}^n \frac{\sin mx}{m} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\sin kx}{k} + \sum_{k=\ell+1}^n \frac{\sin kx}{k}$. Оцінімо першу із сум у правій частині: якщо $1 \leq k \leq \ell$, то $0 < kx \leq \ell x \leq \sqrt{\pi} < \pi, \sin kx < kx, \Sigma' = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\sin kx}{k} < \sum_{k=1}^{\ell} \frac{kx}{k} = \sum_{k=1}^{\ell} x = \ell x \leq \sqrt{\pi}$.

Для оцінювання другої із сум, що утворюється $n - \ell$ доданками, мусимо міркувати по-іншому. Застосуємо наведену вище нерівність Абеля (із «зсувом» індексів). То ж $\sigma_p = \sum_{k=\ell+1}^n \sin kx, y_p = \frac{1}{p}, \ell + 1 \leq p \leq n$.

Тоді

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sum_{k=1}^p \sin kx - \sum_{k=1}^{\ell} \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(p + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(\ell + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\cos(\ell + \frac{1}{2})x - \cos(p + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{(p + \ell + 1)x}{2} \sin \frac{(p - \ell)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}, \\ &\sum_{k=\ell+1}^n \frac{\sin kx}{k} \leq \frac{1}{\ell + 1} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Узявши до уваги, що $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}, \sin \frac{x}{2} > \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{\pi}, \frac{\sqrt{\pi}}{x} < \ell + 1$, одержуємо оцінки $\Sigma'' = \sum_{k=\ell+1}^n \frac{\sin kx}{k} < \sqrt{\pi}, \sum_{m=1}^n \frac{\sin mx}{m} = \Sigma' + \Sigma'' < 2\sqrt{\pi}$.

Нехай $\ell = 0$, тобто $\sqrt{\pi} < x < \pi$. Тоді суму $\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$ оцінюємо таким же чином, як і суму Σ'' - застосуванням нерівності Абеля. Дійсно, $\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} < \frac{\pi}{x} < \sqrt{\pi}$. Якщо ж $\ell \geq n$, то $nx \leq \sqrt{\pi} < \pi, 0 < kx \leq nx < \pi, \sin kx < kx, 1 \leq k \leq n$, і $\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} < \sum_{k=1}^n \frac{kx}{k} = \sum_{k=1}^n x = nx \leq \sqrt{\pi}$. ■

Висновки

Моделювання за наведеним зразком компактних транстематичних комплексів та їх систематичне застосування в освітній практиці не лише сприяє розширенню уявлень учителів / майбутніх учителів про дидактичний статус та взаємодію ключових розділів програми поглибленого вивчення математики, методику підготовки обдарованих учнів до інтелектуальних змагань з математики, але й робить вагомий внесок у вирішення педагогічної проблеми формування навичок науково-методичного аналізу матеріалів

інтелектуальних змагань. Учні, студенти, учителі й викладачі університетів виходять на принципово новий рівень інтеграції змістових ліній та відповідної спільної пошукової творчості в її різноманітних формах.

Такі блоки задач значною мірою керують поєднанням усіх значущих об'єктів шкільного курсу алгебри (які історично виникали не у функціональній парадигмі її становлення) із сучасним їх сприйняттям як прикладів числових функцій, що є надзвичайно актуальним і складним з методичних позицій кроком для професійно орієнтованої математичної освіти, післядипломного підвищення кваліфікації тощо. Водночас із уживанням цих задач як насамперед задач з тригонометрії широкі можливості виникають для «методичної» реверсивності й дуальності, коли задачі на дослідження функцій відразу доповнюються прикладами на використання встановлених властивостей для розв'язування задач тригонометричного змісту. Ефективність синхронізації пов'язаних зі змістовою лінією «Функції» математичних та/або предметно-методичних компетентностей усіх учасників освітнього процесу на тригонометричній платформі базується на тому, що саме властивості тригонометричних і обернених тригонометричних функцій консолідують основні функціональні характеристики (парність, непарність, періодичність, монотонність, обмеженість і т. д.), передують опануванню важливих розділів вищої математики.

Подальші розвідки мають забезпечувати динамічний розвиток та постійне оновлення тематичного дидактико-методичного контенту – систем складних задач, який визначає перспективи роботи з учнями з високим рівнем академічної обдарованості в сфері математики, дозволяє удосконалити фахову підготовку майбутніх учителів математики в університетах, покращити зміст неперервної освіти працюючих учителів, орієнтованої на сучасне розуміння наукової цільності і наскрізності.

Список використаних джерел

1. Ярхо, Т., Ємельянова, Т., & Легейда, Д. (2019). Упровадження принципу генералізації знань у повторювальний курс елементарної математики в технічних закладах вищої освіти. *Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету*. Серія: Педагогічні науки, 3, 440–450. DOI: <https://doi.org/10.31494/2412-9208-2019-1-3>.
2. Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (Eds) (2000). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design*. Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.
3. Мітельман, І. М. (2022). Формування навичок знаходження найбільших значень функцій трьох змінних під час розв'язування деяких олімпіадних задач. *Збірник наукових праць Сумського державного педагогічного університету «Актуальні питання природничо-математичної освіти»*, 2(20), 64–74. DOI: 10.5281/zenodo.7426573.
4. Задоріна, О. М., Мітельман, І. М., & Папач, О. І. (2022). Питання підготовки майбутніх учителів математики до інтеграції в систему післядипломної педагогічної освіти. *Нова педагогічна думка*, 3(111), 81–90. DOI: 10.37026/2520-6427-2022-111-3-81-90.
5. Швець, В. О. (2024). Змістова лінія «Функції» шкільного курсу математики та особливості її вивчення в середній школі. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 7–19. DOI: <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-7-19>.
6. Грицик, Т. А. (2010). *Диференційоване вивчення тригонометричного матеріалу у профільній школі*. Дис. ... канд. пед. наук, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова.
7. Коберник, В. П. (2015). *Методика навчання тригонометрії в профільній школі: навчально-методичний посібник*. Київ, Видавничий центр Київського університету.

8. Роговський, В. П. (2008). *Методика викладання тригонометрії у профільній школі*. Київ, Освіта.
9. Мітельман, І. М. (2024). Дидактико-методичні аспекти тригонометричної інтерпретації деяких типів алгебраїчних задач підвищеної складності. *Наша школа: науково-практичні студії*, 3(7), 24–39. DOI: [https://doi.org/10.61339/2786-6947.2024.3\(7\).315923](https://doi.org/10.61339/2786-6947.2024.3(7).315923).
10. Гайштут, О. Г., & Ушаков, Р. П. (1997). *Тригонометрія: довідник-задачник*. Київ, МАГІСТР-S.
11. Карпенко, Л. В. (2016). *Тригонометрія: навчальний посібник для учнів 10–11 класів*. Харків, Основа.
12. Конет, І. М. (2006). *Тригонометрія: теорія і практика*. Кам'янець-Подільський, Абетка.
13. Кушнір, І. А. (2006). *101 задача з тригонометрії*. Київ, Факт.
14. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Рабінович, Ю. М., & Якір, М. С. (2001). *Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу*. Тернопіль, Підручники & Посібники.
15. Якиляшек, В. Й. (2001). Застосування тригонометрії до розв'язування алгебраїчних задач. *Математика*, 25–26, 2–4.
16. Третяк, Н. П. (2011). Тригонометричні підстановки під час розв'язування алгебраїчних задач. *Математика в школі*, 10, 22–28.
17. Ясінський, В. А. (2008). Тригонометричні підстановки на математичних олімпіадах. *Математика в школі*, 10, 52–54; 11, 47–52.
18. Мітельман, І. М. (2023). Дидактичні ресурси agile-стратегій підготовки вчителів до роботи з математично обдарованими учнями. *Наша школа: науково-практичні студії*, 1(1), 65–73. DOI: <https://doi.org/10.61339/2786-6947.2023.1.286305>.
19. Мітельман, І. М. (2023). Оцінювання деяких виразів з модулем числа під час розв'язування задач з параметрами в дидактичному контексті підвищення кваліфікації вчителів математики. *Академічні візії [електронне фахове наукове видання]*, 20. DOI: <http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.8096614>.
20. Семенець, С. П. (2011). *Теорія і практика розвивального навчання у системі методичної підготовки майбутніх учителів математики*. Дис. ... доктора пед. наук, Житомирський державний університет імені Івана Франка.
21. Семенець, С. П. (2016). Задачний підхід до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів. *Математика в рідній школі*, 4, 14–18.
22. Скворцова, С. О. (2010). Формування професійної компетентності майбутнього вчителя на засадах контекстного навчання. *Психолого-педагогічні проблеми сільської школи. Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини*, 35, 66–71.
23. Скворцова, С. О. (2011). Динамічна модель процесу формування методичних компетенцій у майбутніх учителів. *Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах. Збірник наукових праць Класичного приватного університету (м. Запоріжжя)*, 17(70), 177–183.
24. Задоріна, О. М., Мітельман, І. М., Моторіна, В. Г., & Папач, О. І. (2024). Скаффолдинг як інструмент випереджального навчання розв'язування ускладнених геометричних задач методом координат та його дидактико-методичного супроводу. *Інноваційна педагогіка*, 74, 33–45. DOI: <https://doi.org/10.32782/2663-6085/2024/74.5>.
25. Дороговцев, А. Я. (1993–1994). *Математичний аналіз: у двох частинах. Ч. 1–2*. Київ, Либідь.

26. Лейфура, В. М., Мітельман, І. М., Радченко, В. М., & Ясінський, В. А. (2003). *Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000*. Київ, Техніка.
27. Мітельман, І. М. (2019). Розвиток предметно-галузевих компетентностей учителів математики в контексті формування згорнутих дидактичних структур. *Професійна компетентність сучасного педагога: методологія, теорія, методика, практика*. Колект. моногр. В. В. Ягоднікова (ред.) та ін. С. 241–257. Одеса, видавець Букаєв Вадим Вікторович.
28. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Рабінович, Ю. М., & Якір, М. С. (2008). *Тригонометрія*. Київ, Генеза.
29. Pólya, G., & Szegő, G. (1976). *Problems and theorems in analysis. Vol. II*. Berlin & New York, Springer-Verlag.
30. Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., & Fink, A. M. (1993). *Classical and new inequalities in analysis*. Dordrecht, Kluwer Acad. Publishers.
31. Ясінський, В. А., & Панасенко, О. Б. (2015). *Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра*. Вінниця, видавець Середняк Т. К.
32. Andreescu, T., & Feng, Z. (2005). *103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team*. Boston-Basel-Berlin, Birkhäuser.